

Feldtheorien mit Subkanonischen Feldern

Ikaros Islam Yusuf BIGI

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555611_0019

Feldtheorien mit Subkanonischen Feldern

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Ikaros Islam Yusuf BIGI
München

1976



1. Berichterstatter: Professor Dr. H.P. Dürr

2. Berichterstatter: Professor Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1976

Herrn Professor H.P. Dürr danke ich sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele klärende und hilfreiche Diskussionen. Zu Dank verpflichtet bin ich auch Dr. N. Winter, Dr. H. Saller, Professor L. Susskind und den Mitgliedern der Theoretischen Abteilung des Max-Planck-Instituts für Physik insgesamt, durch deren geduldige Diskussionsbereitschaft eine Atmosphäre entstand, in der zu arbeiten eine Freude ist. Der Studienstiftung des Deutschen Volkes und der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für wertvolle finanzielle Unterstützung.

Inhaltsübersicht

Zusammenfassung	III
I. Einleitung: Übergang von phänomenologischen Ansätzen zu Eichtheorien; Motivation für nicht-kanonische Dimensionen	1
II. Spinortheorie mit $\dim \psi = 1/2$	6
1. Lineare Theorie	6
2. Einführung der Eichwechselwirkung und spontane Brechung der Skaleninvarianz	16
3. Renormierbarkeit der Theorie	24
4. Unitarität der S-Matrix	28
5. Beziehung zu Heisenbergs nichtlinearer Spinortheorie	29
III. Spinortheorie mit $\dim \psi = -1/2$: allgemeine Einführung	30
1. Lineare Theorie	30
2. Einführung der Eichwechselwirkung und spontane Brechung der Skaleninvarianz	34
3. Renormierbarkeit der Theorie	38
4. Zwischenresumé	47
5. Interpretation des Modells	48
6. Bemerkungen zum leptonischen Sektor	49
IV. Spinortheorie mit $\dim \psi = -1/2$: Hadronischer Sektor	54
1. Einführung der "Gluon"wechselwirkung	54
2. Zum Vergleich: Das Schwinger-Modell	58
3. Berechnung des Beitrags der Selbstenergie zur Masse der Konstituenten	60
4. Berechnung der Vakuumpolarisation für Gluonen	63
5. Eine erste Diskussion der Ergebnisse	65
6. Bezüge des Confinement-Mechanismus zur Zweig-Regel	67

7. Unitarisierung der S-Matrix	68
8. Gluonwechselwirkung und Renormierung	70
V. Zusammenfassung, Ausblick und grundlegende Kritik	70
1. Zusammenfassung	70
2. Ausblick	72
3. Grundlegende Kritik	72
Anhang A: Selbstkonsistente Bestimmung der Masse nach Nambu und Jona-Lasinio	74
Anhang B: Propagator-Matrix für eine Spinortheorie mit $\dim \psi = -1/2$	77
Anhang C: Schwinger-Modell	78
Fußnoten	82
Literatur	85

Zusammenfassung

Wir untersuchen Eigenschaften von Quantenfeldtheorien mit Spinorfeldern, deren Dimension kleiner als der kanonische Wert von $3/2$ ist. Dazu suchen wir zunächst die lineare Version solcher Theorien auf, die als Ausgangspunkt für die Anwendung der üblichen Störungstheorie dienen soll. Wir formulieren die Theorien ohne Massen mit Weylspinoren, für die die Paritätstransformation nicht definiert ist.

Es wird eine Eichwechselwirkung eingeführt und mit Hilfe des "power counting" gezeigt, daß die Theorie renormierbar ist. Dabei stellt sich heraus, daß, falls die Dimension des Spinorfeldes negativ ist, die Renormierbarkeit nur erreicht werden kann, wenn die Wechselwirkung einer weiteren Symmetrie genügt, durch die sie wiederum eindeutig festgelegt wird.

Durch die Eichwechselwirkung läßt sich die Skaleninvarianz der Theorie spontan brechen, wodurch Massen erzeugt werden. Gleichzeitig lassen sich die Spinorfeldoperatoren nunmehr in zwei zueinander orthogonale Sektoren mit entgegengesetzter Norm gruppieren. Es wird vorgeschlagen, den Sektor mit negativer Norm zur Beschreibung der Hadronen, den mit positiver Norm zur Beschreibung der Leptonen zu verwenden.

Um Unitaritätsprobleme, die in all diesen Theorien auftreten, zu beseitigen, wird zwischen den Konstituentenfeldern des hadronischen Sektors eine zusätzliche, langreichweitige Wechselwirkung eingeführt, die keine Eichwechselwirkung ist. Es wird gezeigt, daß wenigstens auf der 1-loop-Ebene "Fermion-Ghost-Confinement" eintritt: die langreichweitige Wechselwirkung wird dynamisch abgeschirmt und die Fermion-Konstituentenfelder mit negativer Norm erhalten unendliche Masse, so daß nur Bindungszustände mit Fermionzahl Null im physikalischen Spektrum dieses Sektors auftreten können. Dann treten auch keine Unitaritätsprobleme mehr auf.

Auf qualitative Bezüge dieses Mechanismus zur Zweig-Regel in Quark-Modellen wird hingewiesen.

I. Einleitung

Zwei verschiedene Methoden, neu auftretende Probleme anzugehen, haben sich bisher in der Physik bewährt:

die eine besteht darin, daß man versucht, aus "ersten Prinzipien" mathematische Folgerungen abzuleiten, die mit dem Experiment verglichen werden;

beim zweiten, phänomenologischen Verfahren läßt man sich stärker von Daten leiten, versucht in ihnen Regelmäßigkeiten zu entdecken, die es dann erleichtern, die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu erraten.

Ein Beispiel für diese Arbeitsweise ist der Fermi-Ansatz in der schwachen Wechselwirkung

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{J}_\mu J_\mu \quad (1) \quad (I.1)$$

wobei der schwache Strom J_μ in einen leptonischen und einen hadronischen Anteil aufgespalten werden kann:

$$J_\mu = J_\mu^{\text{Had}} + J_\mu^{\text{Lept}} \quad (I.2)$$

Dieser einfache Ansatz erlaubt es, eine weite Klasse von Prozessen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment zu beschreiben: leptonische, semi-leptonische und rein hadronische schwache Zerfälle und Reaktionen.

Experimentell wurde noch keine Abweichung von der punktförmigen Wechselwirkung (I.1) festgestellt⁽²⁾.

Trotz ihrer Einfachheit sind Ansätze à la (I.1) sehr flexibel: man kann etwa die Lorentz-Struktur der Ströme abändern und Skalar-, Tensor- oder Axialvektor-Ströme (oder Mischungen davon) verwenden^(F1)

$$\mathcal{L} \propto \bar{J}^2, \bar{J}_{\mu\nu} \bar{J}_{\mu\nu}, \bar{J}_\mu^5 \bar{J}_\mu \quad (I.1a)$$

Solche phänomenologischen Ansätze eignen sich daher sehr, bei einer ersten Durchmusterung von möglichen neuen Wechselwirkungen (oder wenn man "bekannte"

Wechselwirkungen in einem neuen kinematischen Bereich untersucht) die experimentellen Daten zu parametrisieren und nach Zusammenhängen zwischen ihnen zu suchen, die vielleicht Rückschlüsse auf die sie beherrschenden Naturgesetze zulassen.

Dieser Weg ist auch vor kurzem bei der Untersuchung der Lepton-Hadron-Kopplungen in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ beschritten worden^{(4), (5)}.

Auch wenn solche Versuche erfolgreich sind, erheben sich dennoch schwerwiegende grundlegende Probleme:

Modelle dieser Art, d.h. Modelle, deren Kopplungskonstante g sich wie ein inverser Massenparameter verhält

$$g \sim m^{-N}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

verletzen die Unitarität (in niederster Ordnung, indem sie, bei hohen Energien, die Froissart-Grenze brechen) und sind nichtrenormierbar⁽⁶⁾.

Um den phänomenologischen Erfolg solcher oder ähnlicher Ansätze zu verstehen, möchte man sie gerne in eine unitarisierbare und renormierbare Theorie einbetten. Dies gelingt im Rahmen von Eichtheorien, wofür die Weinberg-Theorie für die schwache und elektromagnetische Wechselwirkung das bekannteste Beispiel ist⁽⁷⁾: üblicherweise werden die Eichfelder, die zusätzlich zu den Fermionfeldern eingeführt werden, dabei als elementare Größen aufgefaßt.

Es erscheint freilich attraktiver, vor allem wenn man an die Nützlichkeit von Occam's razor⁽⁸⁾ - "entities should not be unnecessarily multiplied" - glaubt, der Argumentation von Dürr und Winter⁽⁹⁾ zu folgen, die die Eichfelder aus den fundamentalen Fermionfeldern zusammensetzen:

$$A_\mu(x) = - : \psi^\dagger \sigma_\mu \psi : (x) \quad (\text{I.3})$$

Unter Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \\ \psi^\dagger(x) &\rightarrow \psi^\dagger(x) e^{i\alpha(x)} \end{aligned} \quad (\text{I.4a})$$

folgt dann⁽⁹⁾:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (\text{I.4b})$$

wie gewünscht.

Wegen der Transformationseigenschaft (I.4) muß für die Dimension (in Masseneinheiten^{F2}) des Eichfeldes A_μ gelten:

$$\dim A_\mu = 1 \quad (\text{I.5})$$

Es ist dann naheliegend, für die Dimension der "Bausteine" ψ und ψ^+ zu fordern^{x)}

$$\dim \psi = \dim \psi^+ = \frac{1}{2} \quad (\text{I.6})$$

Eine solche Festlegung ist freilich nicht unproblematisch, denn aus (Skalen-) Dimensionsgründen allein schon verschwindet der gleichzeitige Antikommutator solcher Spinorfelder:

$$\frac{1}{i} S(\vec{x} - \vec{y}, 0) = \{ \psi^+(\vec{x}, 0), \psi(\vec{y}, 0) \} = 0 \quad (\text{I.7})$$

Andererseits folgt aus der Spektralzerlegung für Spinorfelder⁽¹⁰⁾:

$$\frac{1}{i} S(\vec{x} - \vec{y}, 0) = - \int_0^\infty d m^2 \rho(m^2) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{I.8})$$

(I.8) erzwingt:

$$\int_0^\infty d m^2 \rho(m^2) = 0 \quad (\text{I.9})$$

(I.9) hat keine nicht-triviale Lösung für $\rho(m^2) \geq 0$

^{x)} Eine auf diese Weise (naiv) festgelegte Dimension wird in der englischsprachigen Literatur als "engineering dimension" bezeichnet.

daher besitzt der Zustandsraum, in dem die Feldoperatoren wirken, notwendigerweise eine indefinite Metrik⁽¹¹⁾. Er läßt sich daher nicht unmittelbar als ein Raum von physikalischen Zuständen interpretieren.

Um eine physikalische Theorie zu erhalten, muß man einen Unterraum mit positiver Metrik finden, der unter der Dynamik invariant ist; d.h. wählt man den Anfangszustand aus diesem Unterraum, so muß auch der Endzustand ein Element davon sein. Dieser Unterraum wird als der physikalische Zustandsraum aufgefaßt, und das Verfahren, ihn zu bestimmen, ist die Unitarisierung.

Eine solche Situation ist freilich, wie vor allem Dürr⁽¹²⁾ und seine Schule hervorgehoben haben, nicht neu in der Physik und sollte daher nicht unbedingt Furcht einflößen: die Quantenelektrodynamik in der Gupta-Bleuler-Formulierung ist das bekannteste (und trivialste) Beispiel: in ihr kann man eine Eichtheorie in manifest Lorentz-kovarianter Form behandeln und handelt sich dafür das Problem der Unitarisierung ein.

Ein ähnliches quid pro quo liegt in der Heisenberg'schen nicht-linearen Spinortheorie⁽¹³⁾ vor:

$$i \sigma \cdot \partial \psi(x) = g : \sigma_r \psi (\psi^\dagger \sigma_r \psi) : (x)$$

Diese Gleichung ist nicht willkürlich gewählt, sondern folgt, wenn man an dem ehrgeizigen und dadurch interessanten Ansatz festhält zu versuchen, mit einem Feldoperator die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zu beschreiben. Diese Größe wird als Spinoroperator gewählt, um alle Darstellungen der Lorentzgruppe daraus aufbauen zu können, und sie kann, per definitionem, nur an sich selbst ankoppeln. Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine solche Wechselwirkung renormierbar ist, besteht darin, daß die Kopplungskonstante g dimensionslos ist^{F4)}. Dann kann aber die (engineering) Dimension des Spinoroperators ψ nicht den kanonischen Wert $3/2$, sondern nur den subkanonischen Wert $1/2$ besitzen.

Wie oben erwähnt, entsteht dabei das Problem der Unitarisierung, aber angesichts der konzeptionellen Einfachheit des Grundansatzes erscheint dies kein unbilliger Preis - umso mehr, als wir keinen zwingenden physikalischen Grund sehen, eine positiv-definite Hilbertraum-Struktur

nicht nur für Anfangs- und Endzustände, sondern auch für den Wechselwirkungsbereich zu fordern, der Messungen nicht unmittelbar zugänglich ist.

Wir werden die Heisenberg-Theorie in dieser Arbeit nicht speziell weiterverfolgen, sondern allgemeiner untersuchen, welche neuartigen Züge auftreten, wenn man in Feldtheorien mit subkanonischen Spinorfeldern arbeitet, d.h. mit Spinorfeldern, deren Dimension kleiner als der kanonische Wert von $3/2$ ist.

Im besonderen werden die Fälle mit $\dim \psi = 1/2$ und $\dim \psi = -1/2$ behandelt.

Wir wollen hier noch einen mehr philosophischen Grund anführen, warum es uns vielversprechend erscheint, mit subkanonischen Feldern zu arbeiten: üblicherweise beginnt man mit einer klassischen Feldtheorie, die dann quantisiert und in eine Störungstheorie um die freien Felder mit kanonischer (= klassischer) Dimension, die sie bereits vor der Quantisierung besaßen, entwickelt wird. Falls man die Störungsentwicklung vollständig (d.h. nicht nur bis zu einer endlichen Ordnung) aufsummieren könnte, sollte es keinen großen Unterschied ausmachen, um welches Feld entwickelt wird. Eine solche Summation ist aber bisher nicht gelungen.

Daher ist es sehr wichtig, um welches Feld man entwickelt. Ausgehend von der Annahme, daß Quanteneffekte die entscheidende Rolle für die Struktur der Elementarteilchen spielen, erscheint es viel naheliegender, in Näherungsverfahren von Feldern auszugehen, deren Dimension vom kanonisch-klassischen Wert abweicht. Man läßt sich hierbei von der Annahme leiten, daß die Wechselwirkung der vollständigen Quantentheorie zu einer endlichen Umnormierung der Dimension der Felder führt und daß man der Wechselwirkung teilweise bereits dadurch Rechnung trägt, daß man die Theorie nach Feldern mit nicht-kanonischer Dimension entwickelt, und daß so eine schnellere Konvergenz der Näherungsverfahren erzielt werden kann.

II. Spinortheorie mit $\dim \psi = 1/2$

II.1 Lineare Theorie

Bisher ist es nicht gelungen, Quantenfeldtheorien in vier Raum-Zeit-Dimensionen exakt zu lösen, es sei denn, es handelte sich um freie Theorien. Daher bedient man sich verschiedener Verfahren, um Näherungslösungen zu erhalten; das bekannteste dieser Iterationsverfahren ist die Störungstheorie: man nimmt dabei üblicherweise die gesamte Wechselwirkung als Störung an und entwickelt um die Lösungen der linearen, freien Theorie, die in der Regel unschwer zu erhalten sind. Der Entwicklungsparameter ist die Kopplungskonstante⁽¹⁰⁾. Daß ein solches Vorgehen nicht von vorneherein unsinnig ist, zeigt die spektakuläre Übereinstimmung zwischen den Vorhersagen der Quantenelektrodynamik und den experimentellen Werten⁽¹⁴⁾. Dies ist umso bemerkenswerter, als ansonsten die Erfolge bei der theoretischen Durchdringung der Hochenergiephysik recht dünn gesät sind.

Betrachtet man nunmehr die nicht-lineare Spinorgleichung

$$i \sigma \cdot \partial \psi(x) = g : \sigma_{\mu} \psi (\psi^{\dagger} \sigma_{\mu} \psi) : (x) \quad (\text{II.1})$$

so stößt man bei der Anwendung der bekannten Näherungsverfahren sogleich auf ein gewichtiges Problem; denn diese erfordern - als Grenzfall - eine lineare Gleichung, die als Ausgangspunkt der Iteration dient. Läßt man in (II.1) die Kopplungskonstante g einfach gegen Null gehen, so wird man auf

$$i \sigma \cdot \partial \psi_0(x) = 0 \quad (\text{II.2})$$

geführt, auf die freie Weyl-Gleichung. Die Lösungen dieser Gleichung besitzen jedoch die kanonische Dimension $3/2$, während man, wie in Kap. I erläutert, für die nichtlineare Spinorgleichung die subkanonische Dimension $1/2$ fordert, um die Renormierbarkeit der zugrunde gelegten Theorie nicht zu gefährden.

(II.2) ist daher kein geeigneter Ausgangspunkt für ein Iterationsverfahren.

Diese hier nur kurz skizzierte Schwierigkeit - das Fehlen eines offenkundigen Ansatzpunktes für die üblichen Approximationsmethoden - hat in der Vergangenheit das Arbeiten im Rahmen der nichtlinearen Spinortheorie sehr behindert. Es ließen sich zwar Verfahren finden, die auch auf (II.1) anwendbar waren, doch sie waren nicht nur unhandlich, sondern führten häufig auch auf Konsistenzprobleme, die sich nur durch ad-hoc-Annahmen umgehen ließen⁽¹⁵⁾.

Man kann das Vorgehen freilich auch umkehren⁽¹⁶⁾: statt daß man von einem Modell mit Wechselwirkung, ausgedrückt durch eine Differentialgleichung à la (II.1), und mit festgelegter Dimension der Felder ausgeht und fragt, welcher linearen Beziehung solche Felder genügen, untersucht man umgekehrt, welche lineare Gleichung durch Felder einer bestimmten Dimension erfüllt wird; in diese Gleichung wird die Wechselwirkung mittels eines Substitutionsprinzips eingeführt, wie weiter unten erläutert wird. Tut man dies, so ist der Ausgangspunkt für die Anwendung der Störungstheorie, oder einer anderen iterativen Methode, unmittelbar gegeben, nämlich die lineare Theorie, und man kann ohne große Modifikationen die bekannten und vertrauten Methoden der näherungsweisen Lösung von Feldtheorien verwenden. Es ergibt sich dabei als ein Extra-Bonus, daß zumindest einige der oben erwähnten ad-hoc-Annahmen nunmehr Konsequenzen des zugrunde gelegten Schemas sind^{(16), (17), (19)}.

Diesen Weg wollen wir hier einschlagen: wir zerlegen die Zwei-Punkt-Funktion $\langle 0 | \{ \psi_{\alpha}^{+}(x), \psi_{\beta}(0) \} | 0 \rangle$ gemäß ihrer Lorentzstruktur (Massenterme werden vorerst vernachlässigt):

$$\langle 0 | \{ \psi_{\alpha}^{+}(x), \psi_{\beta}(0) \} | 0 \rangle = (x \cdot \vec{\sigma})_{\alpha\beta} \rho(x) \quad (x) \quad (II.3)$$

und beachten, daß aus $\dim \psi = \dim \psi^{+} = 1/2$ für die Lorentzinvariante Funktion $\rho(x)$ folgt:

$$(x) \quad g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_r \equiv (1, \vec{\sigma}); \quad \bar{\sigma}_r \equiv (1, -\vec{\sigma}); \quad \partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial x_r}; \quad \square \equiv \partial_r \partial_r$$

Alle Indizes werden unten angeschrieben; über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

$$\rho(x) \propto \varepsilon(x_0) \delta(x^2) \quad (II.4)$$

so gilt:

$$\sigma \cdot \partial \square \psi(x) = 0 \quad (II.5)$$

Dies ist dann die lineare Theorie, die als Anfangspunkt für die Störungstheorie dient. Wir wollen sie aber nicht als freie Theorie bezeichnen, da, wie bereits in Kap. I erwähnt, eine Grundannahme in unserem Ansatz ist, daß die Wechselwirkung, die in einem realistischen Modell vorhanden sein muß, die Dimension vom kanonischen ("klassischen") Wert von $3/2$ auf $1/2$ gedrückt hat und sie auf diese Weise auch in einer linearen Theorie bereits teilweise berücksichtigt worden ist.

(II.5) ist eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Dürr hat gezeigt⁽¹⁸⁾, wie ein solcher Fall im Lagrange-Formalismus behandelt werden kann. Wir wollen hier aber versuchen, ein solches Modell so kanonisch wie möglich zu behandeln und schreiben (II.5) daher um:

$$i \sigma \cdot \partial \psi(x) = \hat{\psi}(x) \quad (II.6a)$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) \quad (II.6b)$$

$$i \sigma \cdot \partial \hat{\psi}(x) = 0 \quad (II.6c)$$

Durch diese Umdefinition haben wir drei Differentialgleichungen erster Ordnung erhalten, wofür wir unmittelbar eine Lagrangefunktion niederschreiben können:

$$\mathcal{L} = \hat{\psi}^+ (i \sigma \cdot \partial \psi - \hat{\psi}) + \psi^+ i \sigma \cdot \partial \hat{\psi} + \hat{\psi}^+ (i \bar{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi} - \hat{\psi}) \quad (II.7)$$

Zu beachten sind vor allem die Ausdrücke $\sim -(\hat{\psi}^+ \hat{\psi} + \hat{\psi}^+ \hat{\psi})$.

Ohne sie würde durch Variation der Felder nicht das gekoppelte Gleichungssystem (II.6a-c) erzeugt werden, sondern drei entkoppelte Weylgleichungen (dann sähe die Lagrangefunktion (II.7) ähnlich dem kinetischen Term von Modellen mit SU(3)-Symmetrie). Einmal im Besitz einer Lagrange-Funktion,

liegt es nahe, die Theorie, beschrieben durch (II.7), kanonisch zu quantisieren, d.h. zu fordern:

$$\left\{ \pi_o(x), \psi(0) \right\}_{x_o=0} = i \delta^3(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \pi_r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r} \quad (\text{II.8})$$

Wir erhalten damit

$$\left\{ \psi(x), \hat{\psi}^+(0) \right\} = \left\{ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(0) \right\} = \frac{1}{2\pi} \bar{\sigma} \cdot \partial \varepsilon(x_o) \delta(x^2) \quad (\text{II.9a})$$

Festzuhalten ist hierbei, daß ψ und $\hat{\psi}^*$ zueinander konjugiert sind und nicht etwa ψ und ψ^* .

Aus den Feldgleichungen (II.6a-c) folgern wir weiter:

$$\left\{ \psi(x), \psi^+(0) \right\} = -\frac{1}{4\pi} \bar{\sigma} \cdot x \varepsilon(x_o) \delta(x^2) \quad (\text{II.9b})$$

$$\left\{ \hat{\psi}(x), \psi^+(0) \right\} = -\frac{i}{2\pi} \varepsilon(x_o) \delta(x^2) \quad (\text{II.9c})$$

$$\left\{ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(0) \right\} = \left\{ \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(0) \right\} = 0 \quad (\text{II.9d})$$

Eine kompaktere Schreibweise für (II.9a-d) läßt sich erzielen, indem man einen Superspinor⁽¹⁶⁾ einführt:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \hat{\psi}(x) \\ \hat{\hat{\psi}}(x) \end{pmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Dann folgt:⁽¹⁶⁾

$$\left\{ \Psi(x), \Psi^+(0) \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \bar{\sigma} \cdot x & -i & \bar{\sigma} \cdot \partial \\ -i & \bar{\sigma} \cdot \partial & 0 \\ \bar{\sigma} \cdot \partial & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta(x; 0) \quad (\text{II.11})$$

Der Propagator läßt sich analog angeben:

$$\langle 0 | T \Psi(x) \Psi^*(0) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 + i\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 + i\varepsilon} & 1 & \bar{\sigma} \cdot p \\ 1 & \bar{\sigma} \cdot p & 0 \\ \bar{\sigma} \cdot p & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

An (II.12) kann abgelesen werden, was wir im Kap. I bereits kurz besprochen, daß der Zustandsraum eine indefinite Metrik besitzt. Denn (II.12) zeigt, daß, während $\hat{\psi}$ positive Norm besitzt, ψ und $\hat{\psi}$ Norm-Null haben und daß

sie nicht orthogonal zueinander sind. (Dieser Sachverhalt wurde weiter oben bereits kurz gestreift, als wir feststellten, daß ψ und $\hat{\psi}^+$ zueinander konjugiert sind). In der Literatur werden Objekte mit diesen beiden Eigenschaften "Geister-Paare" genannt, und es wurde gezeigt, daß Unitarisierung in einem solchen Fall kein unüberwindliches Problem darstellt⁽¹²⁾. Darauf werden wir später noch ausführlicher zurückkommen.

Die Struktur des Zustandsraums wird durchsichtiger, wenn man zunächst ein Problem betrachtet, das völlig verschiedener Natur zu sein scheint: Bisher betrachteten wir nur den Fall, daß alle Felder masselos sind. Was passiert, wenn Massenparameter in der Theorie auftreten?

Um eine erste, sehr vorläufige Antwort auf diese Frage zu finden, führen wir Massen explizit in die Lagrange-Funktion ein, d.h. wir addieren zu dem Ausdruck (II.7) einen Term der Art⁽¹⁶⁾:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m^2}{2} [\psi^+ \psi + \psi^+ \hat{\psi}] \quad (\text{II.13})$$

Dies ist der allgemeinste mögliche Ausdruck, da $m \hat{\psi}^+ \psi$, $m \hat{\psi}^+ \psi$, $m^3 \psi^+ \psi$ etc. für Weylspinoren nicht lorentz-kovariant sind.

Die Feldgleichungen lauten nunmehr:

$$i \sigma \cdot \partial \psi(x) = \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.14a})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) + \frac{1}{2} m^2 \psi(x) \quad (\text{II.14b})$$

$$i \sigma \cdot \partial \hat{\psi}(x) = \frac{1}{2} m^2 \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.14c})$$

oder zusammengefaßt:

$$i \sigma \cdot \partial (\partial^2 + m^2) \psi(x) = 0 \quad (\text{II.15})$$

Für den Propagator, ausgedrückt mit Hilfe des Superspinors (II.10), ergibt sich damit:

$$\langle 0 | \bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}^+(0) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2 - m^2} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & | & \bar{\sigma} \cdot p (1 - \frac{m^2}{2p^2}) \\ | & \sigma \cdot p & \frac{m^2}{2} \\ \bar{\sigma} \cdot p (1 - \frac{m^2}{2p^2}) & \frac{m^2}{2} & (\frac{m^2}{2})^2 \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.16})$$

(Hierbei wurden Zusätze $\sim i\epsilon$ im Nenner des Integranden der Einfachheit halber unterdrückt).

Wie bereits erwähnt, besitzen ψ und $\hat{\psi}$ Norm Null und sind nicht orthogonal zueinander. Nunmehr ist es aber möglich, Linearkombinationen aus ψ und $\hat{\psi}$ zu bilden, die normierbar und zueinander orthogonal sind:

$$\psi_+ = \frac{m}{2} \psi + \frac{1}{m} \hat{\psi} \quad (\text{II.17a})$$

$$\psi_- = \frac{m}{2} \psi - \frac{1}{m} \hat{\psi} \quad (\text{II.17b})$$

Die Feldgleichungen lassen sich dann schreiben als

$$i \sigma \cdot \partial \psi_+ = m \hat{\psi} \quad (\text{II.18a})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi} = m \psi_+ \quad (\text{II.18b})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_- = 0 \quad (\text{II.18c})$$

und der Propagator, ausgedrückt mit Hilfe eines neuen Superspinors $\tilde{\Psi}$

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \hat{\psi}(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix} \quad (\text{II.19})$$

lautet:

$$\langle 0 | \tilde{\Psi}(x) \tilde{\Psi}^\dagger(0) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-i p \cdot x} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 - m^2} & \frac{m}{p^2 - m^2} & 0 \\ \frac{m}{p^2 - m^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 - m^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

(II.20) und II.18) lassen ein sehr interessantes Ergebnis deutlich werden: treten in der Theorie Massenparameter auf, so entkoppeln - in einer geeignet gewählten Darstellung - die Feldgleichungen teilweise, die im masselosen

Fall gekoppelt sind (s. II.6a-c). Diese Entkopplung tritt auf eine solche Weise ein, daß zwei der drei Weylspinoren, nämlich ψ und $\hat{\psi}$, sich zu einem Dirac-Spinor mit positiver Norm zusammenfassen lassen, für den eine Paritätstransformation definiert werden kann⁽¹⁹⁾:

$$\psi_+(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \hat{\psi}(-\vec{x}, t) \quad (\text{II.21a})$$

$$\hat{\psi}_+(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} \psi(-\vec{x}, t) \quad (\text{II.21b})$$

während für ψ , das Feld mit negativer Norm, eine PC-Transformation definiert werden kann

$$\psi_-(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} i\sigma_2 \psi^\dagger(-\vec{x}, t) \quad (\text{II.21c})$$

unter der die Theorie invariant ist.

Während also im Masse-Null-Fall die Parität keine Symmetrie ist, läßt sich, sobald Massenparameter vorhanden sind, ein Teilraum des Zustandsraums konstruieren - nämlich der, der von ψ und $\hat{\psi}$ erzeugt wird - in dem die Parität als Symmetrie verankert ist.

Ferner sieht man sofort auch das folgende:

die masselose Theorie ist invariant unter der Phasentransformation

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi(x) \quad (\text{II.22a})$$

$$\hat{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.22b})$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \hat{\bar{\psi}}(x) \quad (\text{II.22c})$$

und darüber hinaus unter der folgenden Transformation:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi(x) + i \tilde{\alpha} \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.23a})$$

$$\hat{\psi}(x) \longrightarrow \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.23b})$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) \longrightarrow \hat{\bar{\psi}}(x) \quad (\text{II.23c})$$

mit $\tilde{\alpha} \equiv \frac{\alpha'}{\Lambda}$

wobei α' eine reelle Zahl und Λ ein Massenparameter ist, der "von außen" vorgegeben wird, um die Symmetrie (II.23) in der masselosen Theorie formulieren zu können.

In der massiven Theorie stellt die Transformation (II.23) keine Symmetrie mehr dar. Drückt man aber die Theorie in den Feldern $\hat{\psi}$, ψ und $\bar{\psi}$ aus (s. II.17), so entkoppeln, wie bereits gesagt, die Feldgleichungen, und sie sind invariant unter den Transformationen:

$$\psi_+(x) \longrightarrow \psi_+(x) \quad (\text{II.24a})$$

$$\hat{\psi}(x) \longrightarrow \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.24b})$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x) \quad (\text{II.24c})$$

und ebenso für:

$$\psi_+(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi_+(x) \quad (\text{II.25a})$$

$$\hat{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.25b})$$

$$\underline{\psi}(x) \longrightarrow \underline{\psi}(x) \quad (II.25c)$$

Die Symmetrietransformationen (II.23) $\underline{\psi}$ für $m = 0$ und (II.24) $\underline{\psi}$ für $m \neq 0$ sind natürlich nicht unkorreliert: Drückt man nämlich (II.24) in den Feldern $\underline{\psi}$, $\hat{\underline{\psi}}$ statt in $\underline{\psi}$, $\underline{\psi}$ aus, so erhält man (für infinitesimale Transformationen):

$$\underline{\psi}(x) \longrightarrow \underline{\psi}(x) - \frac{i\alpha}{2} \underline{\psi}(x) + i \frac{\alpha}{m^2} \hat{\underline{\psi}}(x) \quad (II.26a)$$

$$\hat{\underline{\psi}}(x) \longrightarrow \hat{\underline{\psi}}(x) \quad (II.26b)$$

$$\hat{\hat{\underline{\psi}}}(x) \longrightarrow \hat{\hat{\underline{\psi}}}(x) + \frac{i\alpha m^2}{4} \underline{\psi}(x) - \frac{i\alpha}{2} \hat{\underline{\psi}}(x) \quad (II.26c)$$

Für $\alpha \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$ derart, daß $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ m^2 \rightarrow 0}} \frac{\alpha}{m^2} = \text{endlich} = \tilde{\alpha} \equiv \frac{\alpha'}{\Lambda^2}$ gilt, folgt daraus:

$$\underline{\psi}(x) \longrightarrow \underline{\psi}(x) + i \tilde{\alpha} \hat{\underline{\psi}}(x)$$

$$\hat{\underline{\psi}}(x) \longrightarrow \hat{\underline{\psi}}(x)$$

$$\hat{\hat{\underline{\psi}}}(x) \longrightarrow \hat{\hat{\underline{\psi}}}(x)$$

d.h. (II.23) wird reproduziert.

Man sieht allerdings, daß der Grenzübergang $m \rightarrow 0$ in der Regel in der vorliegenden Theorie besondere Sorgfalt erfordert. Denn drückt man die Feldgleichungen in $\underline{\psi}$, $\hat{\underline{\psi}}$, $\underline{\psi}$ aus (s. II.18a-c), so gehen sie für $m \rightarrow 0$ in drei vollständig entkoppelte Weylgleichungen über. Werden die Feldgleichungen aber in $\underline{\psi}$, $\hat{\underline{\psi}}$, $\hat{\hat{\underline{\psi}}}$ ausgedrückt (s. II.14a-c), so gehen sie für $m \rightarrow 0$, wie man auch erwarten würde, in die ursprüngliche masselose Theorie (II.6a-c) über, deren Gleichungen nicht entkoppeln.

Dieses Problem läßt sich bereits unmittelbar am Fermionpropagator ablesen: auf ihn läßt sich eine Partialbruchzerlegung anwenden:

$$\frac{\sigma \cdot p}{p^2(p^2 - m^2)} = \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma \cdot p}{p^2 - m^2} - \frac{\sigma \cdot p}{p^2} \right)$$

Diese Partialbruchzerlegung entspricht dem Übergang von den "Skeleton-Operatoren" ψ , $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$ zu den "Pol-Operatoren" ψ , $\hat{\psi}$, $\bar{\psi}$; sie ist aber nur möglich für $m \neq 0$.

Kehren wir noch einmal zur Lagrangefunktion (II.7) der linearen, masselosen Theorie zurück, aus der wir den (erhaltenen) Strom gemäß der Noether'schen Konstruktion ⁽²⁰⁾ als Generator der Phasentransformation

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \psi(x)$$

$$\hat{\psi}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \hat{\psi}(x)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \hat{\bar{\psi}}(x)$$

bestimmen:

$$j_\mu(x) \equiv -i \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial x_\mu \psi^\ell)} \psi^\ell = \hat{\bar{\psi}}^+ \sigma_\mu \psi + \psi^+ \sigma_\mu \hat{\psi} + \hat{\bar{\psi}}^+ \sigma_\mu \hat{\psi} \quad (\text{II.27})$$

Ebenso für den (erhaltenen) Energie-Impuls-Tensor als Generator der Translationen:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\equiv -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial x_\mu \psi^\ell)} \frac{\partial \psi^\ell}{\partial x_\nu} = \\ &= i \left[\hat{\bar{\psi}}^+ \sigma_\mu \partial_\nu \psi + \psi^+ \sigma_\mu \partial_\nu \hat{\psi} + \hat{\bar{\psi}}^+ \sigma_\mu \partial_\nu \hat{\psi} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

(Hierbei wurden bereits die Feldgleichungen benutzt).

$T_{\mu\nu}$ ist nicht spurfrei, denn

$$T_{\mu\mu} = \hat{\bar{\psi}}^+ \hat{\psi} + \hat{\psi}^+ \hat{\bar{\psi}} \neq 0 \quad (\text{II.29})$$

Der Grund dafür liegt im Auftreten der "verallgemeinerten Massenterme"

$\sim \hat{\bar{\psi}}^+ \hat{\psi} + \hat{\psi}^+ \hat{\bar{\psi}}$ in (II.7); dies sind freilich Ausdrücke, die trotz des

Namens, den wir hier für sie gewählt haben, nicht die Dilatationsinvarianz der Theorie brechen. Es läßt sich auch unschwer ein erhaltener Dilatationsstrom konstruieren:

$$D_\mu = i(\psi^\dagger \sigma_\mu \hat{\psi} - \hat{\psi}^\dagger \sigma_\mu \psi) + T_{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{II.30a})$$

$$\partial_\mu D_\mu = 0 \quad (\text{II.30b})$$

(II.29) besagt daher nur, daß der Zusammenhang zwischen dem kanonischen, d.h. Noetherschen Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ und dem Dilatationsstrom nicht so unmittelbar ist, wie in der freien Weyl- oder Dirac-Theorie.

[Nun ist der Energie-Impuls-Tensor dadurch, daß er die Translationen erzeugen soll, nicht eindeutig festgelegt. Es kann auch in dem hier diskutierten Modell ein Tensor $\theta_{\mu\nu}$ mit den nämlichen Generatoreigenschaften gefunden werden, der obendrein noch

$$D_\mu = x_\nu \theta_{\mu\nu}$$

erfüllt. Die Details hierzu und weitere Feinheiten werden in Ref. 16 und Ref. 21 erläutert.]

Auch im Fall der massiven linearen Theorie ist der Strom durch (II.27) gegeben. Es erweist sich aber als für die weitere Diskussion als nützlicher, ihn durch die Felder ψ , $\bar{\psi}$, $\hat{\psi}$ (s. II.17) auszudrücken:

$$j_\mu = \psi^\dagger \sigma_\mu \psi + \hat{\psi}^\dagger \bar{\sigma}_\mu \hat{\psi} - \bar{\psi} \sigma_\mu \psi \quad (\text{II.31})$$

Das Minuszeichen spiegelt die negative Norm von $\bar{\psi}$ wider.

II.2 Einführung der Eichwechselwirkung und spontane Brechung der Skaleninvarianz

Bisher betrachteten wir den Fall einer linearen Theorie; nunmehr wollen wir, um zu einer realistischeren Theorie zu gelangen, eine Wechselwirkung einführen. Die Forderung, daß die Theorie lokal eichinvariant sein soll, scheint uns das attraktivste Prinzip zu sein, um dieses Vorhaben

zu bewerkstelligen⁽⁹⁾: diese Forderung besagt, daß die Theorie invariant sein soll unter den Transformationen

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi(x) \quad (\text{II.32a})$$

$$\psi^\dagger(x) \rightarrow \psi^\dagger(x) e^{i\alpha(x)} \quad (\text{II.32b})$$

Man überzeugt sich leicht, daß eine lineare Theorie, die nur kinetische Terme enthält, eine solche Invarianz nicht aufweisen kann. Zu diesem Schluß führt auch schon ein Blick auf (I.4a) - die Transformationen hängen, über $\alpha(x)$, auch von der Zeit ab, daher muß die Dynamik festgelegt sein, damit man lokale Eichinvarianz fordern kann.

Es ist bekannt, wie diesem Problem beizukommen ist: mit Hilfe von Vektorfeldern erweitert man die Ableitung zur "kovarianten" Ableitung:

$$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + ig A_\mu$$

Um Eichinvarianz zu erzielen, muß sich das Vektorfeld A_μ unter Eichtransformationen wie folgt transformieren:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

Wie bereits in Kap. I erwähnt, konnten Dürr und Winter⁽⁹⁾ zeigen, daß sich ein solches Vektorfeld aus den fundamentalen Fermionfeldern zusammensetzen läßt (I.3). Wir können also eine lokal eichinvariante Lagrange-Funktion angeben:

$$\mathcal{L} = : \hat{\psi}^\dagger (i\bar{\sigma} \cdot D \psi - \hat{\psi}) : + : \psi^\dagger (i\bar{\sigma} \cdot D \hat{\psi} - \psi) : + : \hat{\psi}^\dagger (i\bar{\sigma} \cdot D \hat{\psi} - \hat{\psi}) : \quad (\text{II.33a})$$

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig : \psi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi : \quad (\text{II.33b})$$

Es erweist sich als technisch vorteilhafter, statt $: \psi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi : (x)$ ein Vektorfeld $R_\mu(x)$ zunächst als unabhängige Größe einzuführen und erst mit

Hilfe eines Lagrange-Multiplikators beide Objekte zu identifizieren:

$$\mathcal{L} = : \hat{\psi}^+ (i \vec{\sigma} \cdot \partial \psi - \hat{\psi}) : + : \psi^+ i \vec{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi} + : \hat{\psi}^+ (i \vec{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi} - \hat{\psi}) : + \quad (\text{II.34a})$$

$$+ \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\lambda$$

$$\mathcal{L}_I = - g j_\mu R_\mu \quad (\text{II.34b})$$

$$\mathcal{L}_R = - \frac{1}{4} k g F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{II.34c})$$

$$\mathcal{L}_\lambda = - g \lambda_\mu [R_\mu(x) + : \psi^+ \sigma_\mu \psi : (x)] \quad (\text{II.34d})$$

$$j_\mu = \hat{\psi}^+ \sigma_\mu \psi + \psi^+ \bar{\sigma}_\mu \hat{\psi} + \psi^+ \sigma_\mu \hat{\psi} \quad (\text{II.34e})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu \quad (\text{II.34f})$$

Es erhebt sich sofort die Frage, ob man nicht auf $\mathcal{L}_R$ in (II.34a) verzichten könnte oder gar sollte, da $\mathcal{L}_R$ nur den kinetischen Anteil des Vektorfeldes R_μ enthält; dieses wird wiederum gemäß (II.34d) aus den Spinorfeldern ψ und $\hat{\psi}$ aufgebaut, deren kinetische Terme bereits in (II.34a) enthalten sind.

Wir können im Augenblick darauf noch keine abschließende Antwort geben; daher haben wir in (II.34c) einen Faktor k eingeführt, dessen numerischer Wert vorerst nicht festgelegt wird. Der Lagrange-Multiplikator λ_μ ist ohne kinetischen Term in die Lagrangefunktion eingeführt worden, da er nur die Identifikation von $R_\mu(x)$ mit $-\psi^+ \sigma_\mu \psi : (x)$ ausdrücken, selbst aber nicht als physikalischer Freiheitsgrad auftreten soll.

Um die Feynman-Regeln zu gewinnen, die der durch (II.34) festgelegten Dynamik entsprechen, bedienen wir uns der üblichen Vorschrift für abelsche

Eichtheorien⁽²²⁾ (für nicht-abelsche Eichtheorien ist es sehr viel schwieriger, die richtigen Feynman-Regeln zu gewinnen; dies zeigt sich etwa im Auftreten der Faddeev-Popov-Geister⁽²²⁾):

- (a) man bildet eine quadratische Matrix vom Rang N (= Anzahl der Felder) aus den Koeffizienten der Ausdrücke in der Lagrangefunktion, die bilinear oder quadratisch in den Feldern sind; ausgedrückt wird diese Matrix im Impulsraum.

z.B. für eine Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = -\varphi \square \varphi - \omega \square \omega$$

ergibt sich die folgende Matrix

$$D \equiv \begin{pmatrix} \overline{\varphi\varphi} & \overline{\varphi\omega} \\ \overline{\omega\varphi} & \overline{\omega\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

Die Inverse zu dieser Matrix ist die Propagatormatrix $(-i\Gamma)$.

In unserem Beispiel also:

$$\Gamma = iD^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \end{pmatrix}$$

, wobei "+iε" der üblichen Wahl des Integrationsweges in der komplexen p_0 -Ebene entspricht⁽¹⁰⁾.

- (b) die (unrenormierten) Vertices sind gegeben durch die Koeffizienten der Wechselwirkungsausdrücke in der Lagrangefunktion (d.h. der Ausdrücke, die mehr als zwei Felder am gleichen Ort vereinen);

z.B. entspricht einer Wechselwirkung $\mathcal{L}_I = \lambda: \varphi^4:$
der Ausdruck $i\lambda$ als Vertex.

Angewandt auf (II.34) ergibt sich zunächst:

$$D \equiv \begin{pmatrix} \overline{\psi}^+ \psi & \overline{\psi}^+ \hat{4} & \overline{\psi}^+ \hat{3} & \overline{\psi}^+ R_r & \overline{\psi}^+ \lambda_r \\ \overline{\psi}^+ \psi & & & & \\ \vdots & & & & \\ \lambda_\mu \psi & & & & \lambda_\mu \lambda_\nu \end{pmatrix} =$$

(II.35)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \cdot p & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \cdot p & -1 & 0 & 0 \\ \sigma \cdot p & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k g p^2 g_{\mu\nu} & -g g_{\mu\nu} \\ 0 & 0 & 0 & -g g_{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Propagatormatrix lautet dann:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{i \bar{\sigma} \cdot p}{(p^2)^2} & \frac{i}{p^2} & \frac{i \bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 & 0 \\ \frac{i}{p^2} & \frac{i \sigma \cdot p}{p^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i \bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i g_{\mu\nu}}{g} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i g_{\mu\nu}}{g} & \frac{i g_{\mu\nu} k p^2}{g} \end{pmatrix} \quad \text{(II.36)}$$

Die 3x3-Untermatrix, die die Propagatoren der Spinorfelder beschreibt, ist natürlich gleich dem Ausdruck (II.12), der sich in der linearen Theorie ergibt.

Die Gestalt der 2x2-Untermatrix der Propagatoren $\langle R_\mu R_\nu \rangle$, $\langle R_\mu \lambda_\nu \rangle$ und $\langle \lambda_\mu \lambda_\nu \rangle$ überrascht zuerst ein wenig: Zwar enthalten $\langle R_\mu \lambda_\nu \rangle$ und $\langle \lambda_\mu \lambda_\nu \rangle$ keinen Pol im Impulsraum und tragen daher nicht zu physikalischen Zwischenzuständen bei; dies war auch zu erwarten, da der Operator λ_μ als Lagrangescher Multiplikator eingeführt wurde, der für sich genommen keine physikalische Bedeutung haben sollte.

Doch was man zuerst vielleicht nicht erwartet, ist, daß der (nackte) Propagator $\langle R_\mu R_\nu \rangle$ sogar identisch verschwindet, den man eigentlich mit dem Photonpropagator in Verbindung bringen möchte. Freilich wird einem bald klar, daß man ob dieses Ergebnisses nicht überrascht sein sollte, denn der Lagrange-Multiplikator λ_μ wurde in (II.34d) gerade so eingeführt, daß sich durch Variation nach λ_μ ergibt:

$$R_\mu(x) = - : \psi^\dagger \sigma_\mu \psi : (x)$$

Das Photonfeld (oder allgemeiner das Eichfeld) ist also ein Bindungszustand der fundamentalen Fermionen, und es propagiert nur über die Fermion-Kanäle:

The diagram shows the expansion of the photon propagator. On the left, a wavy line with a shaded oval in the middle is equated to a sum of terms. The first term is a crossed-out wavy line. The subsequent terms are:

- A wavy line connected to a fermion loop (a circle with two vertices labeled ψ and $\psi^\dagger$), which is then connected to another wavy line.
- A wavy line connected to a fermion loop with an internal photon line (a vertical dashed line labeled λ), which is then connected to another wavy line.
- A wavy line connected to a fermion loop with an internal photon line and an internal fermion line (a vertical dashed line labeled λ and a vertical solid line labeled ψ), which is then connected to another wavy line.
- Ellipses indicating further terms in the series.

(II.37)

Während also der erste Term, der nackte Photonpropagator verschwindet, kann man sich leicht überlegen, daß der zweite Ausdruck keinen Pol erzeugt; dies besorgen dafür die nächsten Terme. Daß ein solcher Propagator einen Pol auch tatsächlich bei Masse Null hat, ist, in einer gewissen Näherung, von Saller gezeigt worden⁽¹⁷⁾.

Die Vertizes lauten, symbolisch dargestellt:

$$\begin{array}{c} \hat{\psi} \\ \diagup \\ \text{---} \text{R} \text{---} \\ \diagdown \\ \psi \end{array} = -i g \sigma_{\mu} \quad (\text{II.38a})$$

$$\begin{array}{c} \hat{\psi} \\ \diagup \\ \text{---} \text{R} \text{---} \\ \diagdown \\ \bar{\psi} \end{array} = -i g \bar{\sigma}_{\mu} \quad (\text{II.38b})$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ \diagup \\ \text{---} \lambda \text{---} \\ \diagdown \\ \psi \end{array} = -i g \sigma_{\mu} \quad (\text{II.38c})$$

Mit diesen Vertizes läßt sich u.a. auch folgender Selbstenergiegraph bilden:

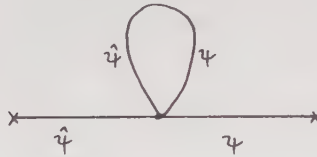
$$\begin{array}{c} \text{---} \text{R} \text{---} \text{---} \lambda \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \psi \quad \psi \quad \psi \quad \psi \end{array} \quad (\text{II.39})$$

Schreibt man den Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}_I$ der Lagrangefunktion (II.34) in der ursprünglichen Formulierung der 4-Fermionwechselwirkung, d.h.

indem man $-\psi^\dagger \sigma_\mu \psi$ für R_μ bereits einsetzt:

$$\mathcal{L}_I = g : (\hat{\psi}^\dagger \sigma_\mu \psi + \hat{\psi}^\dagger \sigma_\mu \hat{\psi} + \psi^\dagger \sigma_\mu \hat{\psi}) \psi^\dagger \sigma_\mu \psi : \quad (\text{II.40})$$

so schreibt sich der Graph (II.39) wie folgt:



(II.41)

Im Anhang A zeigen wir, einen Vorschlag von Nambu und Jona-Lasinio⁽²³⁾ aufgreifend, die sich von einer Analogie zur BCS-Theorie der Supraleitung führen ließen, wie solche Graphen Massen spontan erzeugen.

Ein solches Ergebnis läßt sich auch naiv-formal an (II.40) ablesen. Unter Fierz-Transformation ergibt sich nämlich:

$$\mathcal{L}_I = g \psi^\dagger \sigma_\mu \psi (\hat{\psi}^\dagger \sigma_\mu \psi + \psi^\dagger \sigma_\mu \hat{\psi}) - 2g (\psi^\dagger \hat{\psi})(\hat{\psi}^\dagger \psi) \quad (\text{II.42})$$

Aus dem letzten Ausdruck lassen sich noch zwei Kontraktionen herausziehen:

$$\begin{aligned} (\psi^\dagger \hat{\psi})(\hat{\psi}^\dagger \psi) &= \left[(\psi^\dagger \hat{\psi})(\hat{\psi}^\dagger \psi) \right]_{\text{con}} + \underbrace{\psi^\dagger \hat{\psi}}_{\text{con}} \hat{\psi}^\dagger \psi + \hat{\psi}^\dagger \underbrace{\psi^\dagger \hat{\psi}}_{\text{con}} \psi \equiv \\ &\equiv \left[(\psi^\dagger \hat{\psi})(\hat{\psi}^\dagger \psi) \right]_{\text{con}} + \langle 0 | \psi^\dagger \hat{\psi} | 0 \rangle (\hat{\psi}^\dagger \psi + \psi^\dagger \hat{\psi}) \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Der nichtverschwindende Vakuumerwartungswert $\langle 0 | \psi^\dagger \hat{\psi} | 0 \rangle$ erzeugt spontan Massen:

$$\langle 0 | \psi^\dagger \hat{\psi} | 0 \rangle = \frac{m^2}{2g} \quad (\text{II.44})$$

Im folgenden werden wir - aus Gründen der klareren Darstellung - zur Lagrangefunktion (II.34a) einen Massenterm (II.13) hinzufügen; dabei

sollten wir im Auge behalten, daß ein solcher Ausdruck in der zugrunde gelegten Wechselwirkung spontan erzeugt wird (so wie in der BCS-Theorie der Energie-"gap" spontan erzeugt wird; vgl. Ref. 23).

Ausgedrückt in den "Pol-Feldern" $\psi, \hat{\psi}, \underline{\psi}$, lautet die Lagrangefunktion somit:

$$\mathcal{L} = \psi_+^\dagger i \sigma \cdot \partial \psi_+ + \hat{\psi}^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \hat{\psi} - m(\psi_+^\dagger \hat{\psi} + \hat{\psi}^\dagger \psi_+) - \underline{\psi}^\dagger i \bar{\sigma} \cdot \partial \underline{\psi} + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\lambda + \mathcal{L}_I \quad (\text{II.45a})$$

$$\mathcal{L}_I = -g j_\mu R_\mu = -g(\psi_+^\dagger \sigma_\mu \psi_+ + \hat{\psi}^\dagger \bar{\sigma}_\mu \hat{\psi} - \underline{\psi}^\dagger \bar{\sigma}_\mu \underline{\psi}) R_\mu \quad (\text{II.45b})$$

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} k g F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{II.45c})$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -g \lambda_\mu [R_\mu + : \psi^\dagger \sigma_\mu \psi :] \quad (\text{II.45d})$$

II.3 Renormierbarkeit der Theorie

Ist eine solche Wechselwirkung aber noch renormierbar? Für eine erste Untersuchung dieser Frage benutzen wir das Verfahren des "power counting", d.h. man zählt die Potenzen, in denen innere Impulsvariable auftreten, ab⁽¹⁰⁾. Für den (globalen) Divergenzgrad D eines Graphen ergibt sich dann, wenn wir für den Augenblick $\underline{m} = 0$ setzen:

$$D = 4L - (N_{0,0} + N_{1,-1}) - 2N_{-1,0} - 3N_{-1,-1} + 2B \quad (\text{II.46})$$

hierbei ist L = Zahl der inneren Schleifen = "loops"

N_{ij} = Zahl der Propagatoren $\langle 0 | \psi_i^\dagger \psi_j | 0 \rangle$ bzw. $\langle 0 | \psi_j^\dagger \psi_i | 0 \rangle$

B = Zahl der Propagatoren $\langle 0 | \lambda_\mu \lambda_\nu | 0 \rangle$

$\psi \equiv \psi$; $\psi_0 \equiv \hat{\psi}$; $\psi_1 \equiv \hat{\psi}$

Ist $D > 0$ für einen Graphen, so wird sich in aller Regel auch bei einer genaueren Berechnung herausstellen, daß er divergiert.

Ist $D < 0$, so besteht Grund zur Hoffnung, daß der Graph (im UV-Bereich) konvergiert. Es kann dann nur noch das Malheur eintreten, daß ein Graph, dessen globaler Divergenzgrad D negativ ist, einen Subgraphen enthält, der divergiert, d.h. für den gilt: $D_{\text{sub}} > 0$. Daß dies nicht der Fall ist, muß dann noch untersucht werden.

Ist $D = 0$, so heißt dies in der Regel, daß eine logarithmische Singularität auftritt.

Da die Kopplungskonstante dimensionslos ist, läßt sich D ausdrücken durch die Art und Zahl der äußeren Linien:

$$D = 4 - \sum_n d_n N_n \quad (\text{II.47})$$

wobei N_n = Zahl der äußeren Linien der Art n

d_n = Dimension der äußeren Linien der Art n .

Im vorliegenden Fall lautet die Beziehung

$$D = 4 - \frac{5}{2} N_{\hat{\psi}} - \frac{3}{2} N_{\dot{\psi}} - \frac{1}{2} N_{\psi} - 3 N_{\lambda} - N_R \quad (\text{II.48})$$

D nimmt also monoton mit der Zahl der äußeren Linien ab; es gibt daher nur endlich viele Graphen, die divergieren, und somit lassen sich diese Divergenzen durch endlich viele Subtraktionen beseitigen. In einem solchen Fall spricht man von einer (im weiteren Sinne) renormierbaren Theorie.

Der Begriff Renormierbarkeit wird häufig in einem engeren Sinn ver- wandt, nämlich dann, wenn nur solche Subtraktionsterme notwendig sind, für die es analoge Ausdrücke in der nicht-renormierten Lagrangefunktion gibt.

Ein Beispiel aus der Quantenelektrodynamik (QED):

Der divergente Graph



erfordert einen

Abzugsterm



$$\hat{=} Z e_0 A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

. Es gibt den

analogen Term $e_0 A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ in der nicht-renormierten Lagrangefunktion, und das ganze Verfahren führt nur zu einer Renormierung der Ladung, also einer Größe, die bereits vor der Renormierung aufgetreten war.

In dem hier besprochenen Modell scheint der Fall, bei oberflächlicher Betrachtung zumindest, etwas anders zu liegen:

Betrachten wir z.B. Graphen, in die 4 ψ -Linien einlaufen, also einen $(\psi)^4$ -Vertex:



Die obige Formel (II.48) sagt uns, daß dieser Graph quadratisch divergiert:

$D_{(\psi)^4} = 2$. Um diese Divergenz zu beseitigen, müssen also Abzüge $\sim Z \Lambda^2 (\psi^\dagger \sigma_\mu \psi)^2$ durchgeführt werden (Λ = Massenparameter), nur im Unterschied zur QED gibt es jetzt keinen analogen Ausdruck in der nicht-renormierten Lagrangefunktion. Durch die Renormierung wird also eine neue Kopplung $\sim \Lambda^2 (\psi^\dagger \sigma_\mu \psi)^2$ eingeführt, die die Skaleninvarianz bricht, es sei denn, die Abzüge lassen sich derart wählen, daß nicht nur der divergente sondern auch der konvergente Anteil dieser Graphen kompensiert wird. Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir annehmen, daß eine solche vollständige Kompensation durchgeführt werden kann.

Bei unserer Diskussion dieses Problems wurde die Frage der Eichinvarianz bisher außer Acht gelassen. Die Eichsymmetrie, die die nicht-renormierte Lagrangefunktion aufweist, darf aber durch das Verfahren, mit dem die

Divergenzen beseitigt werden, nicht zerstört werden, da die Theorie sonst nicht mehr renormierbar wäre. Daher dürfen nur eichinvariante Abzüge durchgeführt werden.

In dem Abzugsterm $\sim Z \Lambda^2 : (\psi^\dagger \sigma_\mu \psi)^2 : (x)$ muß also das Produkt der vier Fermionoperatoren so definiert sein, daß der entstehende Operator eichinvariant ist. Dies mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, da es naheliegend gewesen wäre, wegen

$$R_\mu = - : \psi^\dagger \sigma_\mu \psi :$$

auch

$$: R_\mu R_\mu : = : (\psi^\dagger \sigma_\mu \psi)^2 :$$

anzunehmen, und dann wäre dieses 4-Fermionen-Produkt eichvariant. Wie wir aber sehen, benötigen wir, daß dieses Produkt zumindest auch einen eichinvarianten Anteil enthält.

Es ist freilich auch eine allgemeine Erfahrung in Quantenfeldtheorien, daß die wohldefinierten Produkte von Feldoperatoren nicht notwendigerweise die Eigenschaften aufweisen, die man naiv erwarten würde. Ein Beispiel hierfür ist in dieser Arbeit immer wieder aufgetreten; denn naiv möchte man erwarten, daß für

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi(x)$$

$$\psi^\dagger(x) \longrightarrow \psi^\dagger(x) e^{i\alpha(x)}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x) \sigma_\mu \psi(x) &\longrightarrow \psi^\dagger(x) \sigma_\mu e^{-i(\alpha(x)-\alpha(x))} \psi(x) \\ &= \psi^\dagger(x) \sigma_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

also $\psi^\dagger \sigma_\mu \psi$ eichinvariant ist. Dürr und Winter⁽⁹⁾ zeigten aber, daß dem nicht so ist.

Bisher wurden, wie gesagt, Massenterme vernachlässigt, d.h. $m = 0$ angenommen. Für $m \neq 0$ ändert sich für die Frage der Renormierbarkeit qualitativ kaum etwas, nur, daß nunmehr die Beziehung (II.48) eine obere Grenze

für den Divergenzgrad D angibt:

$$D \leq 4 - \frac{5}{2} N_{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} N_{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} N_{\frac{1}{8}} - 3N_{\lambda} - N_R \quad (\text{II.49})$$

Um zusammenzufassen: verwendet man das Verfahren des "power counting", um eine erste Untersuchung der Renormierbarkeit durchzuführen (und dies ist ohne Zweifel ein sehr grobes Verfahren), so findet man auf diesem Niveau: das hier besprochene Modell ist renormierbar, wenigstens in dem oben erwähnten weiteren Sinn.

II.4 Unitarität der S-Matrix

Der durch die Dynamik definierte physikalische Strom (II.34e) $\overline{[}$ er ist auch der lokale Generator der Phasentransformationen $\overline{]}$ läßt sich nunmehr auch mit Hilfe der Felder $\psi, \hat{\psi}, \underline{\psi}$ (s. II.17a, b)

$$j_{\mu} = \psi_{+}^{\dagger} \sigma_{\mu} \psi_{+} + \hat{\psi}_{+}^{\dagger} \sigma_{\mu} \hat{\psi}_{+} - \underline{\psi}_{-}^{\dagger} \sigma_{\mu} \underline{\psi}_{-} \quad (\text{II.50})$$

Diese Zerlegung verdeutlicht die Struktur des Zustandsraums. Der Strom erzeugt Felder mit positiver Norm - ψ und $\hat{\psi}$ - und die Felder mit negativer Norm - $\underline{\psi}$ mit entgegengesetzter Ladung - nur jeweils in Paaren, gemischte Ausdrücke wie $\psi_{+}^{\dagger} \sigma_{\mu} \underline{\psi}_{-}$ - und nur diese würden die Unitarität der S-Matrix verletzen - treten im Strom nicht auf.

Solange man auch in höheren Näherungen (an die Lösungen der hier besprochenen Quantenfeldtheorie) an dem Ausdruck (II.50) für den Strom festhalten kann, könnte eine Verletzung der Unitarität nur dadurch eintreten, daß die Eichfelder R_{μ} in ihre (Geister-) Bestandteile zerfallen.

Betrachten wir das Problem genauer in einer Darstellung, in der die Identifikation des Eichfeldes R_{μ} mit $:\psi^{\dagger} \sigma_{\mu} \psi:$ über einen Lagrangeschen Multiplikator erfolgt (s. II.34d)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\lambda} &= -g \lambda_{\mu} [R_{\mu} + :\psi^{\dagger} \sigma_{\mu} \psi:] = \\ &= -g \lambda_{\mu} [R_{\mu} + \frac{1}{m^2} (\psi_{+}^{\dagger} \sigma_{\mu} \psi_{+} + \hat{\psi}_{+}^{\dagger} \sigma_{\mu} \hat{\psi}_{+} + \underline{\psi}_{-}^{\dagger} \sigma_{\mu} \underline{\psi}_{-} + \underline{\psi}_{-}^{\dagger} \sigma_{\mu} \psi_{+} + \psi_{+}^{\dagger} \sigma_{\mu} \underline{\psi}_{-})] \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Der Vertex $\lambda_{\mu} \psi_{\mu}^+ \psi_{\mu}$ ist vom Standpunkt der Unitarität gefährlich, da er Übergänge zwischen Zuständen entgegengesetzter Norm vermittelt. Im nächsten Kapitel werden wir ein Verfahren vorschlagen, mit dem sich dieses Problem angehen läßt.

II.5 Beziehung zu Heisenbergs nichtlinearen Spinortheorie

Die hier diskutierte Theorie kann als kanonische Einbettung der nichtlinearen Spinortheorie (= NST) aufgefaßt werden. Sie ist nämlich so formuliert, daß die sehr weit entwickelten und bewährten Methoden kanonischer Theorien - etwa Lagrange-Formulierung, Bethe-Salpeter-Gleichung etc. - auch auf eine Theorie angewandt werden können, die wesentlich nichtkanonisch ist.

Die Feldgleichungen, die aus der Lagrangefunktion (II.33) folgen, sind freilich nicht identisch zur NST. Man könnte zunächst meinen, alle Lösungen mit $\hat{\psi} = 0$ seien auch Lösungen der NST. Doch aus $\hat{\psi} = 0$ folgt auch $\hat{\bar{\psi}} = 0$. Dies brächte große Probleme mit sich, da $\hat{\bar{\psi}}$ zu $\psi^{\dagger}$ kanonisch konjugiert ist, d.h. es soll gelten:

$$\left\{ \hat{\bar{\psi}}(x), \psi^{\dagger}(0) \right\}_{x_0=0} = \delta^3(\vec{x}) \neq 0 \quad (\text{II.52})$$

Daher könnte man nur fordern:

$$\langle \text{phys} | \hat{\bar{\psi}} | \text{phys} \rangle = 0 \quad (\text{II.53})$$

Ob diese Annahme konsistent mit der Dynamik ist, läßt sich freilich noch nicht absehen.

Auf jeden Fall aber versetzt uns eine solche kanonische Einbettung nicht-kanonischer Theorien erstmals in die Lage, vertraute Methoden zu verwenden, um eine bessere Einsicht in die Struktur solcher Theorien zu gewinnen.

III. Spinortheorie mit $\dim \psi = -1/2$ - allgemeine Einführung

III.1 Lineare Theorie

Nunmehr wollen wir eine Theorie betrachten für Spinorfelder ψ_{-2} mit

$$\dim \psi_{-2} = -\frac{1}{2} \quad (\text{III.1})$$

wie dies zuerst von Saller⁽¹⁷⁾ getan worden ist.

Als Motivation ließe sich zunächst angeben, daß bei einer systematischen Untersuchung von Theorien mit subkanonischen Spinorfeldern ein Ansatz wie in (III.1) den nächsten zu betrachtenden Fall beschreibt. Es gibt aber eine Reihe von Argumenten, die gerade diesen Fall als interessant erscheinen lassen, wie im weiteren Verlauf noch deutlich gemacht werden soll. Zunächst verfahren wir analog der Methode, wie sie in Kap. II für $\dim \psi = 1/2$ beschrieben ist.

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\sigma \cdot \partial \square \square \psi_{-2} = 0 \quad (\text{III.2})$$

die zu (III.1) gehörende lineare Gleichung ist. Umgeschrieben in Differentialgleichungen I. Ordnung⁽¹⁷⁾:

$$i \sigma \cdot \partial \psi_{-2} = \psi_{-1} \quad (\text{III.3a})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_{-1} = \psi_0 \quad (\text{III.3b})$$

$$i \sigma \cdot \partial \psi_0 = \psi_1 \quad (\text{III.3c})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_1 = \psi_2 \quad (\text{III.3d})$$

$$i \sigma \cdot \partial \psi_2 = 0 \quad (\text{III.3e})$$

Für die Lagrangenfunktion ergibt sich daraus:

$$\mathcal{L}_0 = \psi_2^+ (i\sigma \cdot \partial \psi - \psi) + \psi_1^+ (i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi - \psi) + \psi_0^+ (i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi - \psi) + \psi_1 (i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi - \psi) + \psi_{-1} (i\bar{\sigma} \cdot \partial \psi - \psi) + \psi_{-2}^+ i\sigma \cdot \partial \psi \quad (\text{III.4})$$

Für den Propagator folgt unter Verwendung des Superspinors Ψ :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_{-2} \\ \psi_1 \\ \psi_{-1} \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_{-1} \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

$$\langle 0 | \Psi^\dagger(x) \Psi(0) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-i p \cdot x}}{p^2} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{(p^2)^2} & \frac{1}{p^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 1 & \bar{\sigma} \cdot p \\ \frac{1}{p^2} & \frac{\sigma \cdot p}{p^2} & 1 & \sigma \cdot p & 0 \\ \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 1 & \bar{\sigma} \cdot p & 0 & 0 \\ 1 & \sigma \cdot p & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\sigma} \cdot p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Es lassen sich zwei verschiedene Massenparameter einführen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{m,\mu} \quad (\text{III.7a})$$

$$\mathcal{L}_{m,\mu} = -\mu^2 \begin{pmatrix} \psi_1^+ & \psi_{-2}^+ \\ \psi_{-2} & \psi_1 \end{pmatrix} - \frac{m^2 - \mu^2}{2} \begin{pmatrix} \psi_0^+ & \psi_{-1}^+ \\ \psi_0 & \psi_{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{III.7b})$$

wodurch die Feldgleichungen (III.3a-c) wie folgt abgeändert werden:

$$i \sigma \cdot \partial \psi_{-2} = \psi_{-1} \quad (\text{III.8a})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_{-1} = \psi_0 + \mu^2 \psi_{-2} \quad (\text{III.8b})$$

$$i \sigma \cdot \partial \psi_0 = \psi_1 + \frac{m^2 - \mu^2}{2} \psi_{-1} \quad (\text{III.8c})$$

$$i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_1 = \psi_2 + \frac{m^2 - \mu^2}{2} \psi_0 \quad (\text{III.8d})$$

$$i \sigma \cdot \partial \psi_2 = \mu^2 \psi_1 \quad (\text{III.8e})$$

Der Propagator für ψ_{-2} lautet nunmehr:

$$\langle 0 | \psi_{-2}^+(x) \psi_{-2}(0) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot x} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 (p^2 - m^2) (p^2 - \mu^2)} \quad (\text{III.9})$$

Da wir mit Weylspinoren arbeiten, bleibt ein Pol bei Masse Null erhalten, auch nachdem Massenterme eingeführt sind. (III.9) ist noch nicht der allgemeinste Ausdruck, dies ist vielmehr:

$$\langle 0 | \psi_{-2}^+(x) \psi_{-2}(0) | 0 \rangle \propto \int d^4 p e^{-ip \cdot x} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 (p^4 - (m^2 + \mu^2) p^2 - \Lambda^4)} \quad (\text{III.9'})$$

Da dadurch aber der Pol-Charakter des Propagators und damit die übliche Interpretation der Theorie bedeutend abgeändert wird (die Pole treten im Komplexen auf), wollen wir in dieser Arbeit solche Fälle ausschließen und an (III.9) festhalten.

In Analogie zu (II.17a,b) führen wir eine Umdefinition der Basisfelder durch (mit $\mu < m$)

$$\psi_R^m = \frac{\sqrt{m^2 - \mu^2}}{2} \psi_{-1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 - \mu^2}} \psi_1 \quad (\text{III.10a})$$

$$\psi_R^\mu = \frac{\sqrt{m^2 - \mu^2}}{2} \psi_{-1} - \frac{1}{\sqrt{m^2 - \mu^2}} \psi_1 \quad (\text{III.10b})$$

$$\psi_L^m = \frac{\mu^2}{2m} \sqrt{m^2 - \mu^2} \psi_{-2} + \frac{1}{m} \sqrt{m^2 - \mu^2} \psi_0 + \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{m^2 - \mu^2}} \psi_2 \quad (\text{III.10c})$$

$$\psi_L^0 = \frac{\mu}{2m} (m^2 - \mu^2) \psi_{-2} - \frac{\mu}{m} \psi_0 + \frac{1}{m\mu} \psi_2 \quad (\text{III.10d})$$

$$\psi_L^\mu = -\frac{\mu}{2} \sqrt{m^2 - \mu^2} \psi_{-2} + \frac{1}{\mu \sqrt{m^2 - \mu^2}} \psi_2 \quad (\text{III.10e})$$

Mit

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_L^m \\ \psi_R^m \\ \psi_L^0 \\ \psi_R^\mu \\ \psi_L^\mu \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

ergibt sich für den Propagator, ausgedrückt in den neuen Feldern:

$$\langle 0 | \tilde{\Psi}^*(x) \tilde{\Psi}(0) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 - m^2} & \frac{m}{p^2 - m^2} & 0 & 0 \\ \frac{m}{p^2 - m^2} & \frac{\sigma \cdot p}{p^2 - m^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma \cdot p}{p^2 - \mu^2} - \frac{(-\mu)}{p^2 - \mu^2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Die offenkundig werdende Struktur zeigt folgende Züge:

- (1) ψ_L^m und ψ_R^m bilden einen Diracspinor positiver Norm.
- (2) ψ_L^0 ist ein linkshändiger Weylspinor positiver Norm.
- (3) ψ_L^μ und ψ_R^μ formen einen Diracspinor negativer Norm.
- (4) die unter (1), (2) und (3) genannten Objekte entkoppeln voneinander.

Dies ist im vorliegenden Fall die Verallgemeinerung der in Kap. II gefundenen Ergebnisse.

III.2 Einführung der Eichwechselwirkung und spontane Brechung der Skaleninvarianz

Die Wechselwirkung wird wieder durch die Forderung der lokalen Eichinvarianz (s. II.32a, b) eingeführt und festgelegt.

Im Unterschied zur Theorie in Kap. II haben wir aber diesmal nicht nur ein rechtshändiges Eichfeld R_μ :

$$R_\mu(x) = -i \bar{\psi} \sigma_\mu \psi(x) \quad (\text{III.13a})$$

sondern auch ein linkshändiges:

$$L_\mu(x) = -\frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \sigma_\mu \psi(x) + \bar{\psi} \sigma_\mu \psi(x) \right) \quad (\text{III.13b})$$

die auf verschiedene Weise an die Links- und Rechtskomponenten des Stromes koppeln können. Der allgemeinste Ansatz für die Eichwechselwirkung lautet daher:

$$\mathcal{L}_I = g_R (\tilde{\alpha}_R R_\mu + (1 - \tilde{\alpha}_R) L_\mu) + g_L (\tilde{\alpha}_L R_\mu + (1 - \tilde{\alpha}_L) L_\mu) \quad (\text{III.14})$$

Insgesamt nimmt die Lagrangefunktion die Gestalt an:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\lambda + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_\xi \quad (\text{III.15a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\psi}_2 (i \sigma \cdot \partial \psi - \psi) + \bar{\psi}_1 (i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi - \psi_0) + \bar{\psi}_0 (i \sigma \cdot \partial \psi - \psi) + \\ & + \bar{\psi}_{-1} (i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi - \psi) + \bar{\psi}_{-2} i \sigma \cdot \partial \psi \end{aligned} \quad (\text{III.15b})$$

$$\mathcal{L}_I = g g_R (\alpha_R R_\mu + (1 - \alpha_R) L_\mu) + g g_L (\alpha_L R_\mu + (1 - \alpha_L) L_\mu) \quad (\text{III.15c})$$

$$\mathcal{L}_R = -\frac{\alpha_R}{4} g k_R (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) \quad (\text{III.15d})$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -\alpha_R g \lambda_\mu \left[R_\mu + \bar{\psi} \sigma_\mu \psi \right] \quad (\text{III.15e})$$

$$\mathcal{L}_L = - \frac{1-\alpha_L}{4} g \kappa_L (\partial_\nu L_\mu - \partial_\mu L_\nu) (\partial_\nu L_\mu - \partial_\mu L_\nu) \quad (\text{III.15f})$$

$$\mathcal{L}_F = - (1-\alpha_L) g \xi_\mu \left[L_\mu + \frac{1}{2} (:\psi_0^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_{-2} + \psi_{-2} \bar{\sigma}_\mu \psi_0:) \right] \quad (\text{III.15g})$$

$$j_\mu^R = : \psi_{-1}^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_1 + \psi_1^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_{-1} : \quad (\text{III.15h})$$

$$j_\mu^L = : \psi_2^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_{-2} + \psi_{-2}^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_2 + \psi_0^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_0 : \quad (\text{III.15i})$$

λ_μ und ξ_μ sind als Lagrangesche Multiplikatoren eingeführt, die die Identifikation (III.13a) bzw. (III.13b) erzwingen.

Die Feynman-Regeln gewinnen wir auf die nämliche Weise wie in Kap. II, wo das Verfahren genauer erläutert wurde.

Für die Propagatormatrix $\underline{P}$ ergibt sich:

$$\underline{P} \equiv \begin{pmatrix} \overbrace{\psi_{-2}^+ \psi_{-2}}^+ & \overbrace{\psi_{-2}^+ \psi_{-1}}^+ & \dots & \overbrace{\psi_{-2}^+ \psi_2}^+ & \overbrace{\psi_{-2} R_\mu} & \overbrace{\psi_{-2} \lambda_\mu} & \overbrace{\psi_{-2} L_\mu} & \overbrace{\psi_{-2} \xi_\mu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \overbrace{\psi_2^+ \psi_{-2}}^+ & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \overbrace{\xi_\mu \psi_{-2}} & & & & & & & \overbrace{\xi_\mu \xi_\nu} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|cccc|cccc} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{(p^2)^3} & \frac{1}{(p^2)^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{(p^2)^2} & \frac{1}{p^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & & & & & & & \\ \frac{1}{(p^2)^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{(p^2)^2} & \frac{1}{p^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 & & & & & & & \\ \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{(p^2)^2} & \frac{1}{p^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ \frac{1}{p^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & -\frac{i g_{\mu\nu}}{g^{\alpha_R}} & & & & & \\ & 0 & & & & \frac{-i g_{\mu\nu}}{g^{\alpha_R}} & \frac{i k_L g_{\mu\nu} p^2}{g^{\alpha_R}} & & 0 & & & \\ \hline & & & & & & & 0 & -\frac{i g_{\mu\nu}}{g^{(1-\alpha_L)}} & & & \\ & 0 & & & & & & \frac{-i g_{\mu\nu}}{g^{(1-\alpha_L)}} & \frac{i k_L g_{\mu\nu} p^2}{g^{(1-\alpha_L)}} & & & \end{array} \right) \quad (\text{III.16})$$

Die Vertizes lauten, symbolisch dargestellt:

$$\begin{array}{c} \psi \\ | \\ \text{---} \text{R} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{l} \psi \\ -2 \end{array} \end{array} = -i g \alpha_R \sigma_\mu \quad (\text{III.17a})$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ | \\ \text{---} \text{R} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{l} \psi \\ 0 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \psi \\ | \\ \text{---} \text{R} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{l} \psi \\ -2 \end{array} \end{array} = -i g \alpha_L \bar{\sigma}_\mu \quad (\text{III.17b})$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \lambda \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{l} \psi \\ -1 \end{array} = -i g \bar{\sigma}_\mu \quad (\text{III.17c})$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ | \\ \text{---} \text{L} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{l} \psi \\ -1 \end{array} \end{array} = -i g (1 - \alpha_R) \sigma_\mu \quad (\text{III.17d})$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ \circ \\ \text{---} L \text{---} \psi_0 \end{array} = \begin{array}{c} \psi \\ \text{---} L \text{---} \psi_{-2} \end{array} = -i g (1 - \alpha_L) \bar{\sigma}_\mu \quad (\text{III.17e})$$

$$\begin{array}{c} \psi \\ \circ \\ \text{---} \xi \text{---} \psi_{-2} \end{array} = -\frac{i}{2} g \bar{\sigma}_\mu \quad (\text{III.17f})$$

III.3 Renormierbarkeit der Theorie

Wieder fragen wir zunächst, ob eine solche Wechselwirkung auch renormierbar ist und wiederholen dazu die Schritte, die wir in Kap. II vorgeführt haben:

Zunächst setzen wir $m = \mu = 0$ und erhalten dann für den Divergenzgrad D :

$$\begin{aligned} D = 4L - (N_{0,0} + N_{1,-1} + N_{2,-2}) - 2(N_{0,-1} + N_{1,-2}) - \\ - 3(N_{0,-2} + N_{-1,-1}) - 4N_{-2,-1} - 5N_{-2,-2} - 2(N_{\xi\xi} + N_{\lambda\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

hierbei ist

L = Zahl der inneren Schleifen = "loops"

N_{ij} = Zahl der Propagatoren $\langle 0 | \psi_i^\dagger \psi_j | 0 \rangle$ bzw. $\langle 0 | \psi_j^\dagger \psi_i | 0 \rangle$

$N_{\xi\xi}$ = Zahl der Propagatoren $\langle 0 | \xi_\mu \xi_\nu | 0 \rangle$

$N_{\lambda\lambda}$ = Zahl der Propagatoren $\langle 0 | \lambda_\mu \lambda_\nu | 0 \rangle$

Da auch hier die Kopplungskonstanten $\alpha_R g$ und $\alpha_L g$ dimensionslos sind, läßt D sich wiederum durch die Art und Zahl der äußeren Linien ausdrücken:

$$D = 4 - \sum_n d_n N_n \quad (\text{III.19})$$

wobei N_n = Zahl der äußeren Linien der Art n

d_n = Dimension der äußeren Linien der Art n.

Also in dem nunmehr diskutierten Modell:

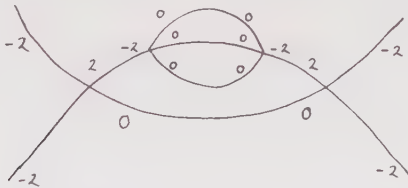
$$D = 4 + \frac{1}{2} N_{(-2)} - \frac{1}{2} N_{(-1)} - \frac{3}{2} N_{(0)} - \frac{5}{2} N_{(1)} - \frac{7}{2} N_{(2)} - N_R - N_L - 3N_A - 3N_F \quad (\text{III.20})$$

wobei $N_{(j)}$ = Zahl der äußeren ψ_j -Linien.

Ein entscheidender Unterschied zum in Kap. II diskutierten Fall fällt sofort auf: D nimmt nicht mehr monoton mit der Zahl der äußeren Linien ab: denn erhöht man $N_{(-2)}$, so erhöht sich auch D.

Der Grund hierfür ist sofort klar: wir betrachten nämlich ein Modell, in dem auch Felder mit negativer Dimension (in Masseneinheiten) vorkommen: $\dim \psi_{-2} = -1/2$! Im allgemeinen wird eine solche Theorie daher nicht renormierbar sein. Man kann dies an einem (relativ) einfachen Beispiel leicht ablesen:

Der Graph

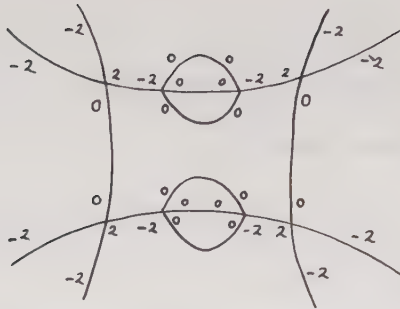


(III.21)

wobei "j" für ψ_j steht, hat als Divergenzgrad:

$$D_4 = 12 - 6 = 6$$

während sich für



(III.22)

$$D_8 = 20 - 12 = 8$$

ergibt usf.

Es erscheint angebracht, an dieser Stelle einem möglichen Mißverständnis vorzubeugen: wenn wir Graphen wie die in (III.21) und (III.22) diskutieren, so schließen wir auch den Fall ein, daß sie Bestandteil eines größeren Graphen, also ein Subgraph sind. Die "äußeren" Linien eines solchen Subgraphen können daher gleichzeitig "innere" Linien des Gesamtgraphen sein.

Man sieht auch sofort den einzig möglichen Ausweg aus diesem Dilemma: die Wechselwirkung muß so beschaffen sein, daß pro äußerer ψ_2 -Linie mindestens eine äußere ψ_0 - oder ψ_1 - oder ψ_2 -Linie auftritt.

Für die Kopplung $j_\mu L_\mu$ mit $L_\mu = -\frac{1}{2} (:\psi_0^\dagger \bar{\psi}_2 + \psi_2^\dagger \bar{\psi}_0:)$

ist dies, wie man leicht einsieht oder am obigen Beispiel abliest, nicht der Fall. Daher ist eine notwendige Bedingung, daß das Modell renormierbar ist:

$$\alpha_L = \alpha_R = 1$$

Wie steht es nun mit der Kopplung $j_\mu R_\mu$ mit $R_\mu = -:\psi_0^\dagger \bar{\psi}_1:$?

Hier gilt nun (für $m = \mu = 0$):

$$N_{(-2)} = N_{(2)} \quad (\text{III.23})$$

Dies kann man wie folgt einsehen:

- (a) ψ_{-2} kann nur über $:\psi_{-2}^+ \bar{\psi}_{-2} \psi_{-2} R_{\mu}:$, $R_{\mu} = -:\psi_{-1}^+ \bar{\psi}_{-1} \psi_{-1}:$
ankoppeln, d.h.:

läuft eine ψ_{-2} -Linie in einen Vertex, so läuft genau eine
 ψ_{-2} -Linie heraus.

- (b) ψ_{-2} kann nur propagieren, wenn es sich in ψ_{-2} verwandelt:

$$\langle 0 | \psi_j^+ \psi_{-2} | 0 \rangle = 0 \quad \text{für } j \neq -2$$

In den nächsten Vertex läuft also wieder eine ψ_{-2} -Linie ein und das Spiel wiederholt sich.

- (c) Läuft eine äußere ψ_{-2} -Linie in einen Graphen ein, so muß daher
genau eine äußere ψ_{-2} -Linie aus ihm herauslaufen.

Also gilt (III.23).

Der entscheidende Grund hierfür ist, daß in der Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_I = g : (\psi_{-2}^+ \bar{\psi}_{-2} \psi_{-2} + \psi_{-2}^+ \bar{\psi}_{-2} \psi_{-2}) \psi_{-1}^+ \bar{\psi}_{-1} \psi_{-1} + \dots :$$

ψ_{-2} und ψ_{-2} symmetrisch auftreten, d.h. daß $\mathcal{L}_I$ invariant gegenüber Vertauschung von ψ_{-2} und ψ_{-2} ist. Dies wäre nicht mehr der Fall, wenn der Strom auch an $L_{\mu} = -\frac{1}{2} : (\psi_{-1}^+ \bar{\psi}_{-1} \psi_{-1} + \psi_{-1}^+ \bar{\psi}_{-1} \psi_{-1}) :$ ankoppelt.

Es erscheint interessant zu bemerken, daß die Symmetrie (für $\alpha_L = \alpha_R = 1$) zwar im Wechselwirkungsausdruck $\mathcal{L}_I$ erfüllt ist, durch die "verallgemeinerten" Massenterme $\sim \psi_{-1}^+ \psi_{-1} + \psi_{-1}^+ \psi_{-1}$ aber gebrochen wird.

Diese Symmetrieeigenschaft der Wechselwirkung bewirkt die Renormierbarkeit der Theorie - zunächst für $m = \mu = 0$.

Denn:

$$D = 4 - 3N_{|2|} - \frac{1}{2}N_{(-1)} - \frac{3}{2}N_{(0)} - \frac{5}{2}N_{(1)} - N_R - 3N_\lambda \quad (\text{III.24})$$

mit $N_{|2|}$ = Zahl der äußeren ψ_{-2} -Linien =
 = Zahl der äußeren ψ_2 -Linien

Auch für $m \neq 0$, $\mu \neq 0$ gibt es kein Problem. Zwar ist Punkt (b) des obigen Beweises nicht mehr richtig, d.h. ψ_2 kann auch anders als nur durch Verwandlung in ψ_{-2} propagieren, aber es muß "Strafe" zahlen, da in einem solchen Fall mindestens ein Faktor $\sqrt{\text{Masse}}^2$ im Zähler des Propagators auftritt (bei Verwandlung von ψ_2 in ψ_{-1} , sonst ist es mehr) $\sqrt{s}$. Anhang B. Für den Divergenzgrad folgt somit als obere Grenze:

$$D \leq 4 + \frac{1}{2}N_{(-2)} - \frac{7}{2}N_{(2)} - 2(N_{(-2)} - N_{(2)}) - \frac{1}{2}N_{(-1)} - \frac{3}{2}N_{(0)} - \frac{5}{2}N_{(1)} - N_R - 3N_\lambda = 4 - \frac{3}{2}(N_{(-2)} + N_{(2)}) - \frac{1}{2}N_{(-1)} - \frac{3}{2}N_{(0)} - \frac{5}{2}N_{(1)} - N_R - 3N_\lambda \quad (\text{III.25})$$

D.h.: ebenso wie in dem in Kap. II betrachteten Fall ist die hier diskutierte Theorie renormierbar. Dort war es im wesentlichen eine Folge davon, daß die Kopplungskonstante dimensionslos ist (und es war auch eine Folge der Eichinvarianz, deren Bedeutung bei der Behandlung logarithmischer Singularitäten voll zum Tragen kommt, die wir im Rahmen dieser Arbeit freilich vernachlässigt haben); hier hingegen war ein zusätzliches Ingredienz notwendig, damit die Theorie renormierbar ist: die Wechselwirkung mußte eine weitere Symmetrie aufweisen, durch die sie dann wiederum eindeutig festgelegt wurde.

Nur als kurze Seitenbemerkung: Geht man noch einen Schritt weiter und betrachtet eine Theorie mit dem $\psi_{-3} = -3/2$ (!), die sich darstellen läßt mit sieben Feldern ψ_{-3} , ψ_{-2} , ..., ψ_2 , ψ_3 , und führt eine Eichwechselwirkung ein, so läßt sich der Strom j_μ zunächst an drei verschiedene Eichfelder anknüpfeln:

$$\mathcal{L}_I \sim j_\mu (\alpha_1 R_\mu + \alpha_2 L_\mu + \alpha_3 \tilde{R}_\mu) \quad (\text{III.26})$$

mit

$$R_\mu = - : \psi^\dagger \sigma_\mu^- \psi :$$

$$L_\mu = -\frac{1}{2} : (\psi_0^\dagger \bar{\sigma}_\mu^- \psi + \psi_{-2}^\dagger \bar{\sigma}_\mu^- \psi) :$$

$$\tilde{R}_\mu = -\frac{1}{2} : (\psi_1^\dagger \sigma_\mu^- \psi + \psi_{-3}^\dagger \sigma_\mu^- \psi) :$$

Unsere bisherige Erfahrung legt es aber nahe zu erwarten, daß die Forderung der Renormierbarkeit $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ erzwingt und die Wechselwirkung somit wieder eindeutig festlegt.

Die Renormierbarkeit schränkt also die Lagrangefunktion III.15 wie folgt ein:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\lambda + \cancel{\mathcal{L}_2} + \cancel{\mathcal{L}_3} \quad (\text{III.27a})$$

$$\mathcal{L}_I = g j_\mu R_\mu \quad (\text{III.27b})$$

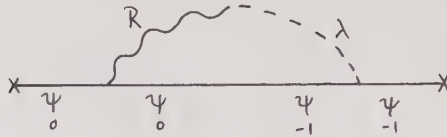
$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} g k (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) \quad (\text{III.27c})$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -g \lambda_\mu [R_\mu + : \psi^\dagger \sigma_\mu^- \psi :] \quad (\text{III.27d})$$

$$j_\mu = j_\mu^L + j_\mu^R \quad (\text{III.27e})$$

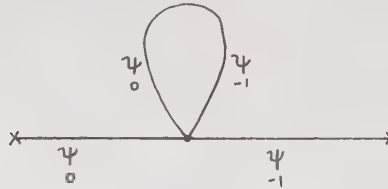
In der unrenormierten Lagrangefunktion (III.27) treten die Felder alle masselos auf. Um zu sehen, wie weit diese Eigenschaft durch die Renormierung

berührt wird, betrachten wir, wie in Kap. II, die Selbstenergiegraphen der Fermionfelder, z.B.



(III.28)

oder ausgedrückt in der Schreibweise mit der 4-Fermion-Kopplung (d.h. indem man $\sim \psi_0^\dagger \psi_{-1}^\dagger \psi_{-1} \psi_0$ für R_μ bereits einsetzt):



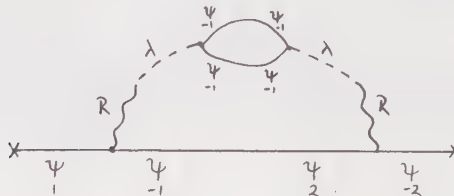
(III.29)

Wie im Anhang A gezeigt wird, kann ein solcher Graph Massen spontan erzeugen, und zwar in der Notation von (III.7b) einen Ausdruck der Art $\sim \frac{m^2 - \mu^2}{2}$ oder symbolisch:



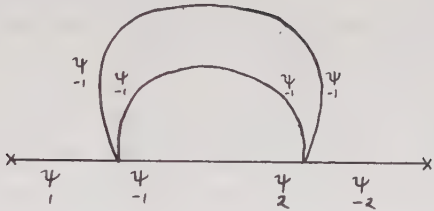
(III.30)

Der andere in (III.7b) aufgeführte Massenterm $\sim \mu^2$ läßt sich erst in der nächsthöheren Ordnung spontan erzeugen, durch



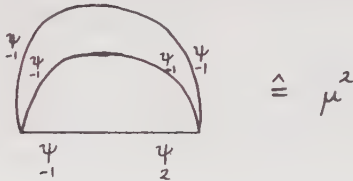
(III.31)

oder alternativ geschrieben:



(III.32)

Symbolisch schreiben wir wiederum für diesen Sachverhalt



(III.33)

Diese Ergebnisse gelten natürlich, streng genommen, nur in niederster Ordnung Störungstheorie. So wie wir es bereits in Kap. II taten, wollen wir aber auch hier annehmen, daß sich dieser Trend in allen Ordnungen der Störungstheorie fortsetzt und daß das folgende qualitative Fazit gezogen werden kann: die Massen werden spontan durch die Eichwechselwirkung erzeugt.

Dem wollen wir Rechnung tragen, indem wir zur Lagrangefunktion, die als Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen, wie etwa Störungstheorie, dient, einen Massenausdruck $\mathcal{L}_{m,\mu}$ (s. III.7b) hinzufügen; wir wollen aber nicht vergessen, daß dies nur der leichteren "Buchhaltung" bei Iterationsverfahren dient und daß dieser Ausdruck als durch die grundlegende 4-Fermion-Wechselwirkung spontan erzeugt aufgefaßt wird.

Nunmehr können wir die Theorie statt in den Feldern $\psi_2, \psi_{-1}, \dots, \psi_{\frac{1}{2}}$ teilweise auch in den Feldern $\psi_R^m, \psi_R^\mu, \dots, \psi_L^\mu$ (s. III.10) ausdrücken und erhalten somit:

$$\mathcal{L}_{eff.} \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_{m,\mu} = \bar{\Psi} \left(\sum \cdot \underline{D} - \underline{M} \right) \Psi + \lambda_\mu (R_{\mu+} \cdot \bar{\psi}_{-1} \sigma_{\mu-} \psi_{-1}) + \quad (III.34a)$$

$$+ \mathcal{L}_R$$

mit

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \underline{\psi}_+^{D,m} \\ \underline{\psi}_+^v \\ \underline{\psi}_-^{D,-\mu} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \underline{\psi}_+^{D,m} &= \begin{pmatrix} \psi_L^m \\ \psi_R^m \end{pmatrix} \\ \underline{\psi}_-^{D,-\mu} &= \begin{pmatrix} \psi_R^\mu \\ \psi_L^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III. 34b})$$

$$\underline{\Sigma}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_0 \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \\ & & \gamma_0 \gamma_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{III. 34c})$$

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} m \underline{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mu \underline{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III. 34d})$$

$$\underline{D}_\mu = (\partial_\mu + igR) \times \underline{I}_5 \quad (\text{III. 34e})$$

$$\underline{I}_5 = \begin{pmatrix} \underline{I}_2 & 0 \\ 0 & \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III. 34f})$$

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} kg (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu)(\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) \quad (\text{III. 34g})$$

III.4 Zwischenresumé

Fassen wir einmal unseren bisherigen Gedankengang zusammen, der uns auf (III.34) geführt hat:

- (1) Wir begannen mit einem unabhängigen Spinorfeld ψ_{-1} und schreiben eine lineare Feldgleichung dafür nieder (III.2).
- (2) Aus Gründen der Konvenienz schreiben wir (III.2) in fünf Differentialgleichungen I. Ordnung um, die alle miteinander verkoppelt sind.
- (3) Wir legen die (Eich-) Wechselwirkung fest, indem wir fordern, daß die Theorie invariant ist unter der simultanen Eichtransformation

$$\psi_i(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \psi_i(x) \quad \text{für alle } i = -2, \dots, +2.$$

Die so bestimmte Kopplung erhält die Fermionenzahl.

- (4) Es zeigt sich nunmehr, daß mit Einführung der Eichwechselwirkung auf natürliche Weise Massen für die Fermionfelder spontan erzeugt werden können.
- (5) Mit den so gewonnenen Massenparametern läßt sich ein neuer Satz von fünf Fermionfeldern mit nichtverschwindender Norm aus den alten fünf Spinorfeldern konstruieren, der die äußerst bemerkenswerte Eigenschaft aufweist, daß die Feldgleichungen für ihn teilweise entkoppeln. Dies führt dazu, daß die Theorie nicht nur unter simultanen Phasentransformationen aller fünf Felder invariant ist, sondern auch, wenn man nur bestimmte Teilmengen des Satzes der Felder transformiert (s. III.12).
- (6) Parallel dazu wird, zumindest auf dem Niveau der Baumgraphen, durch die Eichwechselwirkung nicht nur eine Gesamt-Fermionenzahl erhalten, sondern, wie man an der diagonalen Struktur von (III.12) sofort ablesen kann, insgesamt drei Fermionzahlen, nämlich
 - (a) im Raum positiver Metrik zwei: eine für Fermionen mit Masse $m \neq 0$ und eine für masselose Fermionen.
 - (b) im Raum negativer Metrik eine für Fermionen mit Masse μ^{F7} .

Daß im Raum positiver Metrik zwei getrennt erhaltene Fermionzahlen existieren, könnte eine Eigenschaft der Baumgraphennäherung sein, die in höheren Näherungen nicht unbedingt erhalten zu bleiben braucht.

Was aber auch in höheren Ordnungen gelten muß, um nicht in Schwierigkeiten mit der Unitarität zu gelangen, ist, daß es wenigstens zwei getrennt erhaltene Fermionzahlen geben muß: eine für Felder mit positiver Norm und eine für Felder mit negativer Norm.

III.5 Interpretation des Modells

Daher bietet sich die folgende physikalische Interpretation des vorliegenden Modells an, da alle Felder normierbar sind:

- (1) Die Felder positiver Norm sind die Leptonen.
- (2) Die Felder negativer Norm sind zwar nicht die Hadronen, aber doch deren Konstituenten ("Partonen"), die das Hadronenspektrum erzeugen.

Um einem naheliegenden Mißverständnis sofort vorzubeugen: für die nackten, d.h. nichtrenormierten Massen gilt zwar:

$$\mu_0 = \mu_0, \text{ Hadron} < m_0 = m_0', \text{ Lepton}$$

wir werden aber im nächsten Kapitel eine weitere Wechselwirkung einführen, die die Hadronkonstituenten in Bindungszustände zwingt; die "effektive" Masse, die sie im gebundenen Zustand besitzen, kann im Prinzip sehr viel größer als μ_0 und als m_0 sein. Wie wir sehen werden, gilt für die Masse im ungebundenen Zustand sogar:

$$\mu_{\text{ungeb.}} = \infty$$

- (3) Die Parität ist keine Symmetrie der Gesamtheorie - dort ist sie sogar maximal gebrochen, da wir von einem Weylspinor ausgehen - sondern sie ist nur in gewissen Sektoren der Theorie, etwa dem "hadronischen" Sektor (s. 2) definiert und erhalten.

Man sieht sofort eine wichtige Konsequenz von (1) und (2): Damit ein solches Modell physikalisch überhaupt sinnvoll sein kann, muß es für Leptonen

und Hadronen getrennt zwei absolut erhaltene Fermionzahlen geben. Denn eine (auch noch so geringe) Verletzung dieser separaten Fermionzahlen würde gemäß Punkt (1) und (2) bedeuten, daß ein Übergang von einem Zustand positiver Norm in einen negativer Norm, also eine Verletzung der Unitarität stattgefunden hat. Hierin liegt ein wichtiger Unterschied unseres Modells zu manchen Eichmodellen für die Leptonen und Hadronen, wie z.B. dem Modell von Pati und Salam⁽²⁵⁾.

Bevor wir uns im weiteren eingehend mit dem hadronischen Sektor unseres Modells befassen, wollen wir noch einige kurze Erläuterungen geben zum Leptonen-Sektor.

III.6 Bemerkungen zum leptonischen Sektor

Der leptonische Sektor besteht aus einem (massiven) Diracfeld und einem (masselosen) Weylfeld. Es wäre nun sehr naheliegend, diese Felder als Elektron bzw. dessen Neutrino aufzufassen. Wie wir aber in Kap. (II.3) gesehen haben, vermittelt der unrenormierte Strom nur solche Übergänge, die die Elektronenzahl und die Neutrinozahl getrennt erhält. Falls diese Eigenschaft auch noch für den renormierten Strom gilt (was wir im folgenden annehmen wollen), läßt sich eine paritätserhaltende Wechselwirkung für die Elektronen analog zur Quantenelektrodynamik und eine maximal paritätsverletzende Kopplung für die Neutrinos analog zu den neutralen Strömen einführen, aber keine geladenen Ströme, die den Übergang Elektron $\rightarrow$ Neutrino besorgen. Immerhin ergibt sich aber bereits als natürliche Konsequenz dieses Modells, daß die Leptonen an einer paritätserhaltenden und an einer paritätsverletzenden Wechselwirkung teilhaben. Sehr realistisch ist aber ein solcher Ansatz noch nicht, da in der Natur einerseits schwache geladene Ströme zwischen Elektron und seinem Neutrino vermitteln und andererseits als eine zweite Sorte Lepton das Myon und sein Neutrino existieren mit getrennt erhaltener Myon-Zahl.

Es erscheint naheliegend, wie das Modell zu erweitern ist, um diesen Tatsachen zumindest qualitativ Rechnung zu tragen: Die beiden oben bereits des öfteren erwähnten getrennt erhaltenen Leptonzahlen, die sich in unserem Modell zwanglos ergeben, entsprechen der Elektron- und der Myon-Zahl, und die Theorie wird "verdoppelt", indem die Eichgruppe

zur $SU(2)$ erweitert wird. All die (bisher) benötigten Freiheitsgrade sind dann vorhanden: Zwei Diracfelder - Elektron und Myon - und zwei Weylfelder - Elektroneutrino und Myonneutrino.

Nachdem wir auf diese qualitativen Konsequenzen hingewiesen haben, wollen wir zeigen, wie sich das Weinberg-Modell in unser Scheme einbetten läßt: Im Weinberg-Modell verwendet man $SU(2) \times U(1)$ als Eichgruppe und gruppiert die Leptonen wie folgt:

$$\begin{pmatrix} e_L \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \mu_L \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \text{bilden } SU(2)\text{-Dupletts}$$

$$(e_R) \quad \text{und} \quad (\mu_R) \quad \text{Singulets.}$$

Hierbei bezeichnet e_L (bzw. e_R) ein linkshändiges (bzw. rechtshändiges) Elektron; entsprechend für Myonen. Wir übernehmen diese Struktur bezüglich der inneren Symmetriegruppe und vermählen sie wie folgt mit der Struktur, die - wie oben beschrieben - unserem Modell innewohnt:

Wir wählen zwei Superspinoren (vgl. III.11) Ψ und Φ

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^{D,m} \\ + \\ \psi^\nu \\ + \\ \text{had.} \\ \text{Sektor} \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi^{D,m} \\ + \\ \varphi^\nu \\ + \\ \text{had.} \\ \text{Sektor} \end{pmatrix} \quad (III.35a)$$

$$\begin{array}{ccc} \psi^{D,m} = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} & \xleftrightarrow{SU(2)} & \begin{pmatrix} \mu_L \\ \mu_R \end{pmatrix} = \varphi^{D,m} \\ \psi^\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} & \xleftrightarrow{SU(2)} & \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \varphi^\nu \end{array} \quad (III.35b)$$

Die Pfeile bezeichnen die Felder, die unter SU(2)-Eichtransformationen ineinander übergehen. °

Für Liebhaber geschlossener und abstrakter Schreibweisen seien noch folgende Definitionen aufgeführt:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Psi' \\ \Phi' \end{pmatrix}$$

wobei der Apostroph bedeutet, daß der Einfachheit halber die hadronischen Komponenten der Superspinoren Ψ und Φ unterdrückt werden.

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & i \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & -i \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \\ i & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 0 & -1 \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Spinors Ω , der sich aus sechs Weylspinoren aufbaut, und T_μ , das das Tensorprodukt von SU(2) x SU(2) x U(1) x U(1) ist, läßt sich sofort die Lagrangefunktion kompakt formulieren. Da dies die Struktur der Theorie aber nicht weiter verdeutlicht, sei es hier unterlassen.

Wichtig erscheint uns hingegen folgender Punkt: Eines der tiefsten Rätsel der Leptonenphysik ist die Frage, warum es zwei Sorten von Leptonen in der Natur gibt - Elektronen und Myonen mit ihren entsprechenden Neutrinos - die zwar, bis auf ihre Masse, sich in ihren Eigenschaften völlig entsprechen, deren Zahl aber dennoch getrennt erhalten ist.

Üblicherweise berücksichtigt man diesen Tatbestand (ohne ihn zu erklären), indem man die Zahl der Darstellungen der betreffenden Symmetriegruppe (hier ist es $SU(2) \times U(1)$), die in der Theorie auftreten, einfach verdoppelt (die Eichgruppe bleibt natürlich $SU(2) \times U(1)$). In unserem Modell ist die Situation ganz anders: Die Gruppe $SU(2)$ wird, wie in üblichen Theorien, nur eingeführt, um geladene Ströme beschreiben zu können; daß es aber zwei verschiedene Sorten von Leptonen gibt, d.h. die Eichgruppen $SU(2)$ und $U(1)$ durch jeweils zwei Darstellungen realisiert sind, ist eine natürliche Konsequenz des Modells.

Ein sehr interessantes Problem gerade in diesem Zusammenhang ist die Frage der Symmetriebrechung, da gilt:

$$m_{\nu_{e,\mu}} \ll m_e \ll m_\mu$$

Wie wir oben ausgeführt haben, läßt sich die Skaleninvarianz der Theorie durch die Eichwechselwirkung brechen; wir erhielten (in niederster Ordnung Massenrenormierung):

$$0 = m_{\nu_e} < m_e ; 0 = m_{\nu_\mu} < m_\mu \quad (\text{III.36})$$

Die Beziehung $m_{\nu_e} = 0 = m_{\nu_\mu}$ bleibt sogar in allen Ordnungen erhalten. In einer späteren Arbeit wollen wir die Frage untersuchen, wie es zu $m_e \ll m_\mu$ kommen kann (oder gar muß).

Bisher haben wir uns nur mit den bekannten Leptonen: e, ν_e, μ, ν_μ befaßt. Neuerdings gibt es Berichte, daß Hinweise auf die mögliche Existenz neuer, schwerer Leptonen gefunden worden sind⁽²⁶⁾.

Einmal ganz abgesehen davon, ob sich diese Meldungen bestätigen oder nicht, wollen wir dennoch kurz prüfen, welche qualitativen Aussagen unser Modell und mögliche Verallgemeinerungen davon für neue Leptonen gestatten.

Man erkennt ohne große Mühe drei unterschiedliche Fälle, die kurz angedeutet seien:

- (a) das neue Lepton Λ besitzt ein masseloses Neutrino ν_Λ , in das es dann auch zerfallen kann. Dann wird man unser Grundschema wie folgt verallgemeinern:

$$\Psi^1 = (e_L, e_R, \nu_\Lambda \mid \text{had. Sektor})$$

$$\Psi^2 = (\mu_L, \mu_R, \nu_e \mid \text{had. Sektor})$$

$$\Psi^3 = (\Lambda_L, \Lambda_R, \nu_\mu \mid \text{had. Sektor})$$

wobei (e_L, ν_e) , (μ_L, ν_μ) und (Λ_L, ν_Λ) SU(2)-Dupletts und der Rest Singletts sind.

In diesem Fall wird das Schema also "verdreifacht" oder "vertikal" erweitert.

- (b) das neue Lepton Λ besitzt kein masseloses Neutrino. Dann wird man das Grundschema "horizontal" erweitern, indem man etwa Modelle mit $\dim = -3/2, -5/2$, etc. aufbaut analog zu dem hier benauer erörterten Fall $\dim \Psi = -1/2$. Diese Modelle enthalten im Sektor positiver Norm = leptonischer Sektor mindestens ein Diracfeld mehr. Da bereits eine "Verdopplung" in "vertikaler" Richtung zur Beschreibung von Elektron und Myon angebracht wurde, würde die konsequente Durchführung dieses Verfahrens die Existenz von sogar mindestens zwei neuen Leptonen Λ und $\tilde{\Lambda}$ erfordern:

$$\Psi^1 = (\Lambda_L, \Lambda_R, e_L, e_R, \nu_\mu \mid \text{had. Sektor})$$

$$\Psi^2 = (\tilde{\Lambda}_L, \tilde{\Lambda}_R, \mu_L, \mu_R, \nu_e \mid \text{had. Sektor})$$

wobei $(\Lambda_L, \tilde{\Lambda}_L)$ ein SU(2)-Duplett, (Λ_R) und $(\tilde{\Lambda}_R)$ SU(2)-Singletts bilden.

Im Fall (a) und (b) ergibt sich eine neue getrennt erhaltene Lepton-Zahl (falls die allgemeine Struktur der unrenormierten Theorie ein verlässlicher Führer ist).

(c) das neue Lepton Λ ist ein Bindungszustand der "alten" Leptonen Elektron und Myon.

Wir sehen, daß unser Schema auf dem hier diskutierten Niveau zwar flexibel genug ist, neue Felder aufzunehmen, dennoch aber hinreichend durchstrukturiert ist, so daß es diese Erweiterungen nicht auf jede beliebige, sondern nur auf bestimmte Weisen gestattet.

IV. Spinortheorie mit $\dim \Psi = -1/2$: Hadronischer Sektor

IV.I Einführung der Gluonwechselwirkung

Die Struktur des hadronischen Sektors unterscheidet sich (wenigstens in der nichtrenormierten Theorie) von vorneherein in zweierlei Hinsicht grundlegend von der des leptonischen Sektors:

- (1) im gesamten hadronischen Sektor kann eine Paritätstransformation definiert werden;
- (2) es gibt nur eine erhaltene Fermionzahl (falls die Theorie überhaupt unitarisierbar ist), die wir naheliegenderweise als Baryonenzahl interpretieren.

Die Struktur des Modells, wie wir es bisher besprochen haben, ist eine natürliche Folge unserer beiden Ausgangspunkte:

- (a) Skaleninvarianz mit $\dim \Psi = -1/2$;
- (b) Eichwechselwirkung nebst dadurch erzeugter spontaner Symmetriebrechung der Skaleninvarianz.

Im folgenden werden wir unser Modell erweitern, indem wir eine neue Wechselwirkung einführen. Wir können im Augenblick noch nicht zeigen, daß sich diese Erweiterung zwingend ergibt, aber sie ist auch nicht völlig willkürlich: In Kap. II.3 hatten wir auf die Unitaritätsprobleme hingewiesen, die sich ergeben, wenn das Eichfeld R_μ in seine (Geister-) Bestandteile zerfällt.

Daher schlagen wir vor, eine weitere Wechselwirkung derart an die Felder negativer Norm anzukoppeln, daß diese Felder asymptotisch nicht mehr einzeln auftreten können (etwa, weil ihre Masse unendlich wird), wohl aber als paarweise Bindungszustände endlicher Masse. Dieses "ghost confinement" werden wir mit dem "quark confinement" in Zusammenhang bringen. Wir führen also ein weiteres Vektorfeld W_μ mit

$$\dim W_\mu = -1 \quad (\text{IV.1})$$

ein.

Daraus läßt sich sofort ableiten (vgl. I.6-9), daß auch das Feld W_μ selbst in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik wirkt. Auf sich daraus ergebende Unitarisierungsprobleme kommen wir in Kap. V zu sprechen.

Dieses subkanonische Vektorfeld soll nur an die Konstituenten des hadronischen Sektors angekoppelt werden. Damit ein solches Verfahren möglich ist, muß zunächst W_μ eichinvariant sein. Andernfalls würde man die Eichinvarianz der Theorie, die durch die Einführung des kanonischen Vektorfeldes R_μ (s. III.13) erreicht wurde, zerstören.

So wie die Eichfelder R_μ nicht als elementare Felder eingeführt wurden, sondern aus den Spinorfeldern aufgebaut wurden, könnte man auch analog das neue Vektorfeld W_μ erzeugen:

$$W_\mu(x) = - : \psi_{-2}^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_{-2} : (x) = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \psi_{-2}^+(x - \frac{\xi}{2}) \bar{\sigma}_\mu \psi_{-2}(x + \frac{\xi}{2}) \quad (\text{IV.2})$$

Man überzeugt sich auch leicht, daß ein solches Vektorfeld eichinvariant ist und somit die oben erwähnte Konsistenzbedingung erfüllt.

Der Eichfachheit halber wollen wir diese Identifikation in dieser Arbeit aber nicht beachten, da es uns im Augenblick mehr auf andere Aspekte ankommt.

Die Lagrangefunktion, mit der wir im weiteren arbeiten wollen, nimmt die folgende endgültige Gestalt an (vgl. III.16).

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^+ \left(\sum \cdot (\underline{D} + \underline{G}) - \underline{M} \right) \Psi + \lambda_\mu (R_\mu + : \psi_{-1}^+ \bar{\sigma}_\mu \psi_{-1} :) + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_W \quad (\text{IV.3a})$$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \underline{0} & | & | & | & | \\ \hline - & - & - & - & - \\ \hline - & - & \underline{0} & - & - \\ \hline & & & b W_\mu & 0 \\ & & & 0 & b W_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3b})$$

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} k (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) (\partial_\nu R_\mu - \partial_\mu R_\nu) \quad (\text{IV.3c})$$

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4} W_\mu \square \square (\square + \Lambda^2) W_\mu \quad (\text{IV.3d})$$

Das Vektorfeld W_μ , das nur an die Konstituenten des hadronischen Sektors an koppelt, entspricht in üblicher Sprechweise den Gluonfeldern. Daher werden wir der Kürze halber beide Ausdrücke synonym verwenden.

Auf die Frage, ob diese Theorie noch renormierbar ist, werden wir aus gutem Grund später zurückkommen.

Den Propagator des Gluonfeldes liest man sofort an der Lagrangefunktion ab:

$$\begin{aligned} \langle 0 | W_\mu(x) W_\nu(0) | 0 \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} \frac{(-g_{\mu\nu})}{(k^2)^2 (k^2 - \Lambda^2)} = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik \cdot x} (-g_{\mu\nu}) \left[-\frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} \right] \quad (\text{IV.4}) \end{aligned}$$

Auf einen Propagator $\sim \frac{1}{k^4}$ ist in der Literatur im Zusammenhang mit "confinement" bereits des öfteren hingewiesen worden. Dieses Interesse erklärt sich aus dem folgenden Sachverhalt^{(27), (28)}:

Ein Propagator $\frac{1}{k^4}$ für ein Skalarfeld φ entspricht einer Feldgleichung:

$$\square \square \varphi = j \quad (\text{IV.5})$$

Betrachten wir den statischen Grenzfall zu (IV.5)^{F8} und wählen als Quelle j eine punktförmige Ladung am Ursprung, d.h.

$$\Delta \Delta \varphi = c \delta^3(\vec{x}) \quad (\text{IV.6})$$

so finden wir folgende statische Lösung für (IV.6):

$$\varphi(r) \propto r \theta(r) \quad (\text{IV.7})$$

d.h. das Potential steigt (linear) mit dem Abstand an. Daher ist es in einem solchen Potential nicht möglich, zwei Ladungen beliebig weit voneinander zu entfernen, da dies eine unendliche Energie erfordern würde. Genau diese Eigenschaft ist von großem Interesse im Zusammenhang mit dem sog. "Quark Confinement", der Frage nämlich, wie man es verstehen kann, daß Quarks, obschon in der phänomenologischen Beschreibung der Elementarteilchen von Nutzen, dennoch nicht als isolierte Teilchen auftreten.

Wir wollen dieser Fragestellung hier eine etwas abgewandelte und verallgemeinerte Gestalt geben: "Ist es im Rahmen einer Quantenfeldtheorie möglich, daß gewisse grundlegende Felder zwar eine Rolle spielen bei der dynamischen Beschreibung von Reaktionen der Elementarteilchen, daß ihnen dennoch aber keine isoliert beobachtbare Teilchen entsprechen?" In diesem Sinne verstehen wir das Problem des "Confinement" in dieser Arbeit. Eine solche Fragestellung ergibt sich im Rahmen einer Theorie mit subkanonischen Feldern auf natürliche Weise; denn es ist, wie oft betont wurde, gerade ihr Ausgangspunkt zu argumentieren, daß zwischen den "dynamischen" Feldern und den beobachtbaren physikalischen Teilchen keine Eins-zu-Eins-Beziehung besteht.

Insbesondere wollen wir untersuchen, ob die Wechselwirkung, die durch Gluonen übertragen wird, wirklich dazu führt, daß die Konstituenten des hadronischen Sektors nicht als physikalische Teilchen auftreten. Bevor wir

auf das Problem des Confinement eingehen, das eine Frage des Infrarot-Verhaltens des Modells ist (kleine Impulse $\hat{=}$ große Abstände), betrachten wir das UV-Verhalten: große Impulse $\hat{=}$ kleine Abstände. Ein Propagator $\sim \frac{1}{k^4(k^2 - \Lambda^2)}$ ist sehr "weich" im UV-Bereich, d.h. er geht sehr viel schneller gegen Null für große Impulse als ein Propagator $\sim \frac{1}{k^2}$. Ein Potential, das durch einen solchen Propagator in der 1. Bornschen Näherung erzeugt wird, ist daher in der Lage, wenigstens auf intuitiver Ebene zu "erklären", oder besser, zu veranschaulichen, warum Bjorken-Scaling⁽²⁹⁾ in tiefinelastischer Lepton-Nukleon-Streuung überhaupt und außerdem bei so niedrigen Energien und Impulsüberträgen auftritt; denn dieser Sachverhalt läßt sich so ausdrücken, daß das Potential der starken Wechselwirkung bei kleinen Abständen sehr schnell gegen Null geht. Anders ausgedrückt: die starken Kräfte sind sehr "weich" im UV-Bereich. Wir möchten betonen, daß die Gluon-Wechselwirkung, die diese Züge aufweist, in unserem Modell keine Eichwechselwirkung ist.

Wenden wir uns wieder der Frage des "Confinement" zu. Intuitiv erwartet man, daß das ursprüngliche Potential, das mit dem Abstand anwächst ($V(r) \sim r$), durch die innere Dynamik abgeschirmt wird. Anders ausgedrückt, man stellt sich den folgenden Ablauf vor: schaltet man zu einem Zeitpunkt die Wechselwirkung ein, die das Potential $V(r) \sim r$ erzeugt, so sollte sich unter dieser Dynamik ein solcher Zustand entwickeln, daß das "primäre" Potential abgeschirmt ist. Zustände, für die dies nicht der Fall ist, besitzen unendlich große Energie und gehören daher nicht zum Spektrum physikalischer Zustände.

Wir wollen nun untersuchen, ob diese Erwartung gerechtfertigt ist und ob ihre Erfüllung "Confinement" bedeutet.

IV.2 Zum Vergleich: Das Schwinger Modell

Dazu betrachten wir zunächst die Schwingersche Quantenelektrodynamik in 1-Raum-1-Zeit-Dimension⁽³⁰⁾. Dieses Modell ist explizit lösbar^{(30), (31)}, und es zeigt, daß die oben skizzierte naive Erwartung nicht unsinnig ist: Die Lagrangefunktion in diesem Modell besitzt die vertraute Gestalt:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu \quad (\text{IV.8})$$

Es ist aber wichtig festzuhalten, daß die Ladung g , die in QED in (3+1)-Dimensionen dimensionslos ist (= elektrische Ladung), hier die Dimension einer Masse hat:

$$\dim g = 1 \quad (\text{IV.9})$$

Wir haben es also hier mit einer superrenormierbaren Theorie zu tun.

Aus (IV.8) lassen sich durch Variation die "Maxwell"-Gleichungen gewinnen, so u.a. auch:

$$g = \partial_i F_{i0} = \partial_i F_{i0} = \partial_x E_x = \partial_x^2 u \quad (\text{IV.10})$$

Für eine Punktladung

2-dim.

$$g_p \sim \delta(x) \quad (\text{IV.11})$$

ergibt sich als Lösung

$$u_1 \sim x \theta(x) \quad (\text{IV.12})$$

d.h. wir erhalten ein Potential, das linear mit dem Abstand anwächst.

Soweit die Motivation.

Die allgemeine Lösung dieser Theorie wird im Anhang B näher erläutert. Hier wollen wir nur die Ergebnisse festhalten: ⁽³²⁾

- 1) Die langreichweitigen Kräfte (s. IV.12) werden abgeschirmt. Anders (wenn auch nicht so genau) ausgedrückt: das "Photon" bekommt eine Masse.
- 2) Das Spektrum der Theorie enthält nur freie Bosonen mit Masse $\frac{g}{\sqrt{2}}$. Diese lassen sich als Bindungszustände der Fermionfelder ψ und $\bar{\psi}$ auffassen.

Punkt (2) bedeutet, daß wir Fermion-Confinement vorliegen haben.

Die dynamischen Vorgänge lassen sich wie folgt veranschaulichen ⁽³²⁾:

- (a) Zu einem Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Fermion-Antifermion-Paar erzeugt, das sich auseinanderbewegt gegen den Widerstand des Potentials (IV.12)
- $t = 0$



- (b) Zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_1$, wenn die Trennung vergleichbar mit g^{-1} wird, ist es energetisch günstiger, daß ein weiteres Fermion-Antifermion-Paar aus dem Vakuum erzeugt wird, die die langreichweitigen Kräfte abschirmen

$$t = t_1 \quad \leftarrow \text{---} \times \text{---} \bigcirc \quad \times \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow$$

- (c) Im weiteren Verlauf wiederholt sich dieser Vorgang, bis die vorhandene Energie aufgezehrt ist.

$$t = t_{\infty} \quad \times \text{---} \bigcirc \quad \times \text{---} \bigcirc \quad \times \text{---} \bigcirc \quad \times \text{---} \bigcirc$$

Das Interessante an dieser Theorie ist, daß in ihr die intuitive Erwartung tatsächlich erfüllt wird: Fermion-Confinement tritt ein.

Man kann freilich argumentieren, daß das Schwinger-Modell wie alle Modelle, die in $(1 + 1)$ -Dimensionen definiert sind, nicht sehr realistisch ist; ferner, daß es kaum mehr als eine freie Theorie ist, da die Bosonen, die das Spektrum ausmachen, keinerlei Wechselwirkung mehr zeigen - wie erklärt man dann aber die starke Wechselwirkung? Man kann aber vom Schwingermodell immerhin lernen, daß das Eintreten von Confinement in einer Quantenfeldtheorie nicht prinzipiell unmöglich ist. Wir werden daher versuchen, es auf $(3 + 1)$ -Dimensionen zu übertragen. Im Schwingermodell hatte man es mit einer (superrenormierbaren) Wechselwirkung zu tun, die ein Potential erzeugt, das linear mit dem Abstand wächst.

Wir zeigten bereits, welche Wechselwirkung in $(3 + 1)$ -Dimension die nämlichen Eigenschaften ausweist (s. IV.6, 7): die Kraft wird übertragen von Gluonfeldern W_{μ} , deren Propagator einen Term $\sim \frac{g^{\mu\nu}}{k^2}$ (s. IV.4) enthält. Die Theorie, die sich hierbei ergibt und deren Dynamik in (IV.3) definiert wurde, läßt sich bisher nicht explizit lösen - dies ist ein gemeinsamer Zug aller nichttrivialen Quantenfeldtheorien in $(3 + 1)$ -Dimensionen. Wir sind darauf angewiesen, uns mit dem Krückstock der Störungstheorie vorwärts zu tasten.

IV.3 Berechnung des Beitrags der Selbstenergie zur Masse der Konstituenten

Überprüfen wir die Erwartung (oder Hoffnung), daß Confinement eintritt, indem wir die Korrektur von zweiter Ordnung in der Gluon-Kopplung zum

nackten Fermion-Propagator berechnen; genauer gesagt, wir führen die Massenrenormierung

$$\delta m_F = \left(\text{diagram with a fermion line and a gluon loop} \right) \Big|_{p=m=0} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \quad (\text{IV.13})$$

in niederster Ordnung in der langreichweitigen Gluonwechselwirkung $\sim \frac{1}{k^4}$ durch

$$\delta m_F' = \left(\text{diagram with a gluon loop} \right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{g^2}{\Lambda^2 m_F} \left[\frac{\pi}{2} \frac{m_F}{\lambda} - \frac{3}{2} \right] \quad (\text{IV.14})$$

wobei λ die nackte Gluon-Masse ist.

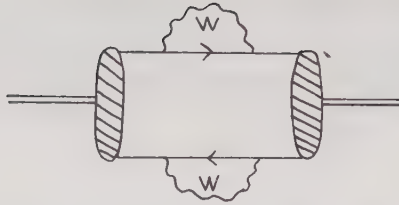
In unserem Modell ist $\lambda = 0$. Daher folgt

$$\delta m_F \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow 0 \quad (\text{IV.15})$$

[die Anteile der Gluonkräfte, die durch Propagatoren $\sim \frac{1}{k^2}$ und $\frac{1}{k^2 - \Lambda^2}$ beschrieben werden, liefern zusammen einen endlichen Beitrag für $\lambda \rightarrow 0$]. D.h. die Fermionen werden unendlich schwer und fallen aus dem physikalischen Spektrum heraus, wie wir vermutet hatten. Es ist auch sofort klar, woran das liegt: die extremen Infrarot-Divergenzen, die mit einem nackten Propagator $\sim \frac{1}{k^4}$ verbunden sind, sorgen für die Divergenz in der renormierten Fermionmasse.

Man zeigt also, daß einzelne Fermionen, an die die Gluonen ankoppeln, asymptotisch nicht auslaufen können, da der Pol im Fermionpropagator verschwindet.

Man könnte dann sehr naheliegend argumentieren, daß auch Fermion-Antifermion-Bindungszustände über den Prozeß



unendlich hohe Masse bekommen und so aus dem Spektrum fallen.

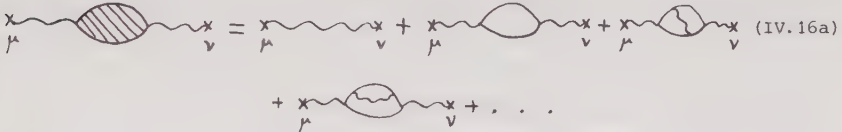
Es ist ein Manko aller derzeit bekannten Confinement-Schemata, hierauf keine direkte Antwort geben zu können. Man kann nur folgendes erwidern (was mehr eine Ausflucht ist): Bindungszustände sind außerhalb des Rahmens der Störungstheorie und obiger Einwand daher nicht ohne weiteres stichhaltig. Was man nämlich tut, ist, gewisse Eigenschaften aus der Störungstheorie zu abstrahieren und zu hoffen, daß diese wenigstens qualitativ richtig bleiben auch bei einer zukünftigen korrekten Behandlung von Bindungszuständen. Man verweist dabei auf lösbare zweidimensionale Modelle, um zu zeigen, daß ein solches Vorgehen nicht prinzipiell unsinnig ist. Man soll aber nicht vergessen, daß ein solcher Zustand unbefriedigend ist.

Wir haben also (mit den bereits des öfteren angegebenen Einschränkungen) gezeigt, daß die Fermionen nach der Renormierung unendlich hohe Masse haben. Es können aber dennoch Bindungszustände endlicher Masse aus Fermionen und Antifermionen (wofür die Vektorkopplung attraktiv ist) auftreten. Dies entspricht in der Elektrodynamik einer Konfiguration, in der keine Ladungen, dafür aber Dipole auftreten; zwischen diesen Dipolen wirkt dann nicht mehr die ursprüngliche Coulombkraft, sondern Dipolkkräfte, die sehr viel schneller mit dem Abstand abfallen - oder anders ausgedrückt: die Coulombkraft wird teilweise abgeschirmt.

Das entsprechende Phänomen sollte auch hier eintreten: die ursprüngliche, nichtrenormierte Wechselwirkung wird zumindest teilweise abgeschirmt - und dies geschieht auch im 2-dimensionalen Schwingermodell: der Pol des Gluonpropagators wird zu einer endlichen Masse verschoben, was die Übersetzung des Begriffs "Abschirmung" auf eine Feldtheorie darstellt. In unserem 4-dimensionalen Analog des Schwingermodells wird man daher erwarten, daß der angezogene Gluonpropagator zumindest keinen Doppelpol bei Masse Null mehr aufweist.

IV.4 Berechnung der Vakuumpolarisation für Gluonen

Betrachten wir dazu den vollen (oder angezogenen) Gluonpropagator, der sich aus der Dyson-Gleichung gewinnen läßt



$$x_{\mu} \text{---} x_{\nu} = x_{\mu} \text{---} x_{\nu} + x_{\mu} \text{---} \text{loop} \text{---} x_{\nu} + x_{\mu} \text{---} \text{loop} \text{---} x_{\nu} + \dots \quad (\text{IV.16a})$$

$$S_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^0 + S_{\mu\sigma}^0 \Pi_{\sigma\sigma} S_{\sigma\nu} \quad (\text{IV.16b})$$

mit dem Vakuumpolarisationsterm

$$\Pi_{\sigma\sigma} = (g_{\sigma\sigma} k^2 - k_{\sigma} k_{\sigma}) \Pi(k^2) \quad (\text{IV.16c})$$

Hat der nackte Propagator die Gestalt

$$S_{\mu\nu}^0 = \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}}{k^2} \quad (\text{IV.17})$$

wie in QED (in (3+1) Dimensionen) und im Schwingermodell, so ergibt sich als Lösung

$$S_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) S(k^2) \quad (\text{IV.18a})$$

mit

$$S(k^2) = \frac{1}{k^2 - k^2 \Pi(k^2)} \quad (\text{IV.18b})$$

Berechnet man $\Pi(k^2)$ in QED mittels Störungstheorie, so findet man, daß $\Pi(k^2)$ sich regulär verhält für $k^2 = 0$. Der Pol in $S_{\mu\nu}$ bei $k^2 = 0$ bleibt also erhalten⁽¹⁰⁾.

Im Schwingermodell zeigt sich aber, daß $\pi(k^2)$ singularär ist für $k^2 = 0^{(31)}$. Dieses Resultat ist intuitiv sofort ersichtlich:

$\pi(k^2)$ ist dimensionslos, andererseits ist es zumindest quadratisch in der Kopplungskonstante g , die Dimension Eins hat. Daher folgt (die (nackte) Fermionmasse ist Null):

$$\pi(k^2) \sim \frac{g^2}{k^2} \quad (\text{IV.19})$$

Der Pol wird also zu einer Masse $\neq 0$ verschoben.

Für einen nackten Propagator (IV.4)

$$S_{\mu\nu}^0 = \frac{-g_{\mu\nu}}{(k^2)^2 (k^2 - \Lambda^2)} \quad (\text{IV.20})$$

ergibt sich als Lösung der Dyson-Gleichung

$$S_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} S(k^2) \quad (\text{IV.21a})$$

$$\begin{aligned} S(k^2) &= \frac{1}{(k^2)^2 (k^2 - \Lambda^2)} \frac{1}{1 - \frac{\pi(k^2)}{k^2 (k^2 - \Lambda^2)}} = \\ &= \frac{1}{k^2 (k^2 - \Lambda^2)} \frac{1}{k^2 - \frac{\pi(k^2)}{k^2 - \Lambda^2}} \end{aligned} \quad (\text{IV.21b})$$

Die Singularitätsstruktur des Propagators wird also durch das Verhalten der Vakuumpolarisation $\pi(k^2)$ bestimmt.

Da $\pi(k^2)$ Dimension vier hat und da es wenigstens quadratisch in der Kopplungskonstante b ist, deren Dimension zwei beträgt, erwartet man, daß

$$\pi(k^2) \rightarrow c \neq 0 \quad \text{für} \quad k^2 \rightarrow 0$$

d.h. aus dem Doppelpol bei $M = 0$ wird ein Einfachpol bei $M = 0$ und ein Pol bei $M \neq 0$.

Um diese Erwartung zu überprüfen, berechnen wir die Vakuumpolarisation $\pi(k^2)$ in zweiter Ordnung in b . Die Rechnung läßt sich analog zu QED

durchführen, da die Gluonfelder an erhaltene Ströme ankoppeln^{F9}.

$$\Pi(k^2) = -\frac{\tilde{\alpha}}{3\pi} \log \frac{M_c^2}{m^2} + \frac{2\tilde{\alpha}}{\pi} \int_0^1 dz \, z(1-z) \log \left(1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right) \quad (\text{IV.22})$$

wobei M_c die Cutoff-Masse beschreibt und $\tilde{\alpha} = \frac{g^2}{4\pi}$
Für $k^2 \rightarrow 0$ ergibt sich somit:

$$\Pi(0) = -\tilde{\alpha} \left\{ \frac{1}{3\pi} \log \frac{M_c^2}{m^2} \right\} \neq 0 \quad (\text{IV.23})$$

In dieser Näherung bleibt bei Masse Null nur ein Pol $\sim \frac{1}{k^2}$ bestehen; der langreichweitige Anteil der Wechselwirkung wird in der Bornschen Näherung durch ein Potential $U(r) \sim \frac{1}{r}$ beschrieben - die ursprüngliche langreichweitige Wechselwirkung, beschrieben durch ein Potential $U(r) \sim r$, ist also abgeschirmt.

Anders ausgedrückt: wir haben für einen "Doppelpol" bei der Masse Null (= Feldkomponente mit Propagator $\sim \frac{1}{(k^2)^2}$) die Massenrenormierung zweiter Ordnung in der Kopplung durchgeführt und gefunden, daß die Massenrenormierung nicht-multiplikativ ist. (Ein weiteres Beispiel für eine solche Situation ist in Anhang A erläutert).

IV.5 Eine erste Diskussion der Ergebnisse

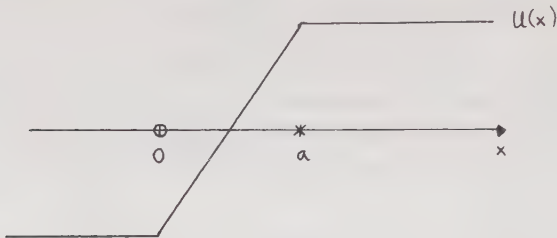
Wir haben unsere Ergebnisse in Ermangelung einer anderen Methode mit Hilfe der Störungstheorie gewonnen in der Hoffnung, daß dabei wenigstens die qualitativen Züge einer vollen Lösung des Modells richtig wiedergegeben werden.

Unter diesem Vorbehalt folgern wir:

Es können in diesem Modell also nur Bindungszustände im physikalischen Spektrum auftreten - analog zum Schwinger-Modell, wo sich dies explizit zeigen läßt. Die Behandlung von Bindungszuständen ist außerhalb des Rahmens der Störungstheorie; die Bethe-Salpeter-Gleichung mit einem geeignet gewählten Integralkern ist ein Weg, dieses Problem anzugehen. Im Prinzip läßt sich damit nicht nur das Spektrum der Bindungszustände ausrechnen, sondern auch ihre Wechselwirkungen miteinander, die Art van-der-Waals-Kräfte der primären Gluonwechselwirkung sind. Dies ist in unserem Modell das Analog

der starken Wechselwirkung. Wir interpretieren die starke Wechselwirkung also nicht als die primäre Wechselwirkung, die das Spektrum der Hadronen erzeugt, sondern als sekundäre Kraftwirkung, als van-der-Waals-Kraft der primären Gluonwechselwirkung.

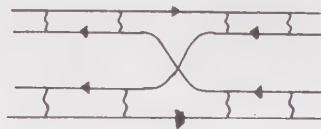
Zur Veranschaulichung betrachten wir wieder das Schwinger-Modell: Befindet sich ein Fermion bei $x = 0$ und ein Antifermion bei $x = a$, so ergibt sich folgender Verlauf des statischen Potentials:



d.h. nur zwischen den beiden Teilchen ist die Kraft von Null verschieden, außerhalb verschwindet sie; dort wird sie also vollständig abgeschirmt. Die van-der-Waals-Kraft im engeren Sinn ist daher Null. Dies heißt aber noch nicht, daß diese Bindungszustände keinerlei Wechselwirkung mehr zeigen. In ihrem Inneren wirken, anschaulich gesprochen, Kräfte, die Fermion-Antifermion-Paare aus dem Vakuum erzeugen, die dann getrennt werden: das Teilchen zerfällt:



Oder solche Bindungszustände können sich räumlich überlappen und dabei Konstituenten austauschen:



Voraussetzung für ein solch einfaches Bild ist freilich, daß der Bindungszustand eine endliche Ausdehnung besitzt, daß also ein endlicher mittlerer Abstand zwischen den Konstituenten bestehen bleibt.

Anders ausgedrückt: punktförmige Teilchen zeigen keine starke Wechselwirkung.

Im Schwinger-Modell mit masselosen Fermionen ist dies nicht der Fall: die Bindungszustände erfüllen eine freie Klein-Gordon-Gleichung, und die S-Matrix ist trivial.

Dies scheint aber eine spezielle Eigenschaft des Schwinger-Modells zu sein, die übrigens die Lösbarkeit ermöglichte. Bereits im massiven Schwinger-Modell⁽³³⁾, d.h. wenn die Fermionen Masse tragen, scheint dies nicht mehr der Fall zu sein.

Im Augenblick nehmen wir einmal an, daß die Bindungszustände eine endliche Ausdehnung besitzen, und daß die Abschirmung der primären Gluonwechselwirkung, die wir oben gezeigt haben, auch in vier Dimensionen im wesentlichen durch einen Potentialverlauf wie in Fig. 8 wiedergegeben werden kann.

IV.6 Bezüge des Confinement-Mechanismus zur Zweig-Regel

Damit läßt sich die starke Wechselwirkung als sekundäre Kraft durch die obigen Diagramme beschreiben. Sie sehen wie Quark-Diagramme aus, die unter Beachtung der Zweig-Regel⁽³⁴⁾ gezeichnet sind. Diese Regel besagt, daß Prozesse der Art:



und



stark unterdrückt sind.

Mag es auch sehr suggestiv sein, daß sich die Gültigkeit der Zweig-Regel in solchen Theorien, die Quark-Confinement zeigen, als natürliche Folge ergibt, so ist es dennoch wichtig, dies auch zu zeigen, ohne sich auf Intuition berufen zu müssen.

Störungstheorie mit Feynman-Graphen ist hierfür kein sehr taugliches Mittel, dennoch reicht sie vielleicht aus, in einfachen Modellen, wie dem massiven Schwinger-Modell, zu Ergebnissen zu gelangen. Dieses Problem soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

IV.7 Unitarisierung der S-Matrix

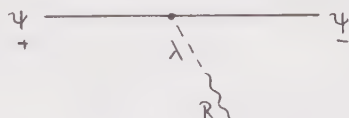
Ein sehr wichtiges Problem unseres Modells haben wir bisher kaum beachtet: das Problem der Unitarisierung. Wie in Kap. I erläutert führt eine subkanonische Dimension für ein Feld zu einer indefiniten Metrik des Zustandsraums. Um eine physikalische Theorie zu erhalten, muß also ein Unterraum mit definiter Metrik konstruiert werden, der unter der Dynamik invariant ist.

In Kap. (II.3) hatten wir auf einen Vertex hingewiesen, der für die Unitarität der Theorie Probleme aufwirft. In dem hier behandelten Modell mit $\dim \psi = -1/2$ stellt sich dieser Vertex wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda &= \lambda_\mu [R_\mu + : \psi_\mu^+ \sigma_\mu \psi :] = \\ &= \lambda_\mu \left\{ R_\mu + \frac{1}{m^2 - \mu^2} \left[\psi_\mu^+ \sigma_\mu \psi + \frac{1}{2} (\psi_\mu^+ \sigma_\mu \psi + \psi_\mu^- \sigma_\mu \psi) + \psi_\mu^- \sigma_\mu \psi \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

wobei ψ_+ bzw. ψ_- ein Spinorfeld mit positiver bzw. negativer Norm bezeichnen.

Es ist offenkundig, daß der Übergang



(IV.25)

die Unitarität verletzt, falls das Feld ψ_- asymptotisch auslaufen kann.

Um gerade diese Schwierigkeit zu beseitigen, haben wir das Gluonfeld eingeführt. Denn wie oben gezeigt wurde (mit den üblichen Caveats), sorgt es dafür, daß Fermionfelder mit negativer Norm nicht asymptotisch auslaufen können, da sie zu unendlicher Masse "hingeschoben" werden. Freilich haben wir uns damit ein neues Problem eingehandelt: wie erwähnt, haben die Gluonfelder selbst subkanonische Norm und wirken in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik.

Man kann aber das oben benutzte Verfahren auch auf die Gluonen anwenden, indem man sie an sich selbst koppeln läßt, z.B.

$$\mathcal{L}_w^I = (W_\mu W_\mu)^2 \hat{=} \text{diagram}$$


oder

$$\mathcal{L}_w^I = W_\mu W_\mu \partial \cdot W \hat{=} \text{diagram}$$


Diese neuen Kopplungen führen zu zusätzlichen Beiträgen zur Vakuumpolarisation, die für die Berechnung des renormierten Gluonpropagators wichtig sind. Man sieht sofort, daß etwa durch den Graphen



auf Grund der Infrarot-Singularitäten der nackten Gluonpropagatoren der Doppelpol im (in niederster Ordnung) renormierten Propagator zu unendlich hoher Masse verschoben wird. Diese Felder können dann also auch nicht asymptotisch auslaufen und verletzen die Unitarität daher nicht.

Die genaue Form der Gluon selbstwechselwirkung haben wir nicht spezifiziert, da dies für unsere mehr qualitativen Überlegungen nicht nötig ist.

IV.8 Gluonwechselwirkung und Renormierung

Wir haben bisher noch nicht die Frage untersucht, ob die Theorie auch noch nach Ankopplung der Gluonwechselwirkung renormierbar ist.

Die Antwort hierauf mag zuerst sehr überraschend klingen: die Frage der Renormierbarkeit wird im Rahmen der Störungstheorie formuliert; da die Störungstheorie aber keine in der Gluon-Kopplung nicht-triviale Lösung liefert, ist das Problem der Renormierbarkeit keine relevante Frage.

Denn sobald in einem Graphen Linien von Feldern negativer Norm auftreten, an die Gluonen an koppeln können, so wird die Masse dieser Felder negativer Norm durch die Gluonwechselwirkung zu unendlich großen Werten geschoben, wie oben gezeigt wurde - dann verschwindet aber gerade ein solcher Graph.

Nichtverschwindende Beiträge liefern daher im Rahmen der Störungstheorie nur Graphen, die ausschließlich aus Feldern positiver Norm aufgebaut sind, an die die Gluonen nicht an koppeln können. Wie bereits des öfteren festgehalten, das Problem liegt für die Gluonwechselwirkung woanders: im Augenblick existiert noch kein Verfahren zu zeigen, daß Bindungszustände endlicher Masse überhaupt existieren, von ihren genaueren Eigenschaften ganz zu schweigen.

V. Zusammenfassung, Ausblick und grundlegende Kritik

V.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir Feldtheorien mit subkanonischen Feldern betrachtet. Unser Ausgangspunkt war eine lineare skaleninvariante Theorie, ausgedrückt mit zwei-komponentigen Weylspinoren, in die eine Eichwechselwirkung eingeführt wurde. Wir konnten zeigen, daß dabei Massen für die Fermionfelder (bis auf eines) erzeugt werden können, die die Skaleninvarianz spontan brechen. Mit diesen Massenparametern konnte aus dem ursprünglichen Satz von Fermion-Feldern durch Linearkombinationen ein Satz neuer Fermionfelder gebildet werden, der bemerkenswerte Eigenschaften aufweist: waren die ursprünglichen Felder Geister-Felder (d.h. sie erzeugen Zustände mit Norm

Null), die durch die Feldgleichungen miteinander verkoppelt waren, so entkoppeln die neu definierten Fermionfelder voneinander in verschiedene Sektoren: zwei Sektoren mit positiv definiter Metrik und einen Sektor mit negativ definiter Metrik. Der Strom, der die Eichwechselwirkung überträgt, erzeugt nur Übergänge innerhalb eines Sektors, nicht aber zwischen verschiedenen Sektoren. Dies bewirkt, daß die Invarianz, die in der ursprünglichen skaleninvarianten Theorie nur bestand, wenn alle Felder gleichzeitig den gleichen Eichtransformationen unterworfen werden, nunmehr bereits vorhanden ist, wenn nur an den Feldern eines Sektors Eichtransformationen durchgeführt werden.

War in der ursprünglichen Theorie die Parität als Symmetrie nicht definiert, so gilt dies nicht mehr ganz, nachdem die Skaleninvarianz spontan gebrochen war: in mindestens einem Sektor läßt sich die Parität als Symmetrie definieren.

Daher interpretierten wir diesen Sektor als den hadronischen Sektor, den anderen Sektor, in dem die Parität nach wie vor nicht generell definiert ist, als den leptonischen. Lepton- und Baryon-Zahl lassen sich getrennt als absolut erhaltene Größen definieren (sofern die Theorie nur unitarisierbar ist).

Um es noch einmal hervorzuheben: die Aufspaltung in Lepton- und Hadron-Felder ist in der hier diskutierten Theorie eine Folge der spontanen Brechung der Skaleninvarianz.

Alle diese Eigenschaften ergeben sich auf natürliche Weise in Theorien mit subkanonischen Weyl-Feldern: dies sind daher die "harten" Eigenschaften solcher Theorien.

Um die Theorie zu unitarisieren (und nur dann besteht eine strikte getrennte Erhaltung von wenigstens zwei verschiedenen Fermionzahlen) führt man masselose Vektorfelder (=Gluonfelder) ein und koppelt sie nur an die Konstituenten des Sektors mit negativ-definiter Metrik. Wir konnten zeigen, daß dann, wenigstens in der 1-loop-Näherung, im Hadronen-Sektor nur Fermion-Antifermion-Bindungszustände auftreten können - dies ist das Analog zum Quark-Confinement, falls keine innere Symmetrie vorhanden ist. Wir fanden ferner Hinweise, wie in einem solchen Modell Zweig's Regel dynamisch verstanden werden kann.

Die Gluonfelder, die das Confinement bewirken und die starke Wechselwirkung als eine Art van-der-Waals-Kraft erzeugen, wurden nicht als Eichfelder eingeführt. Wir wiesen darauf hin, daß im Augenblick noch kein guter Grund zu sehen ist, warum die Gluonen durch Eichfelder beschrieben werden sollten (auch wenn dies üblicherweise so geschieht), daß sogar manche Hinweise dagegen sprechen. Diese Ergebnisse, da sie nicht zwangsläufig aus der Struktur von Theorien mit subkanonischen Feldern zu folgen scheinen, bezeichnen wir als "weiche" Eigenschaften solcher Theorien.

V.2 Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit nicht betrachtet, welche zusätzlichen Effekte die Einführung von nicht-abelschen inneren Symmetrien bewirkt. Eine solche Untersuchung ist als nächster Schritt wünschenswert, da das in dieser Arbeit betrachtete Modell realistischere Züge erhielte, wenn man es durch nicht-abelsche innere Symmetrien erweitert.

V.3 Grundlegende Kritik

In dieser Arbeit haben wir eine Feldtheorie mit nicht-kanonischen Feldern so "kanonisch wie möglich" behandelt; d.h. wir haben versucht, die Theorie im wesentlichen mit Hilfe von Feldern auszudrücken, denen in gewisser Weise eine Teilcheninterpretation gegeben werden kann, sei dies auch in einem Hilbertraum mit negativer Metrik. Wir konnten zeigen, daß ein solches Verfahren zumindest in den Näherungen, die wir bisher betrachtet haben, nicht auf Widersprüche führt. Aber bleibt dies auch noch für höhere Ordnungen so ?

Die Kritik an der quasi-kanonischen Behandlungsweise einer nicht-kanonischen Theorie läßt sich sehr allgemein fassen: ist es nicht möglich, daß man sich durch diese Betrachtungsweise den Blick verstellt hat auf das wesentlich Neue solcher Theorien gegenüber konventionellen Ansätzen ? In der Behandlung subkanonischer Feldtheorien, die wir in dieser Arbeit gewählt haben, und in der versucht wurde, so weit wie möglich ein Teilchenbild für die Felder zu benutzen, erscheint etwa die Frage, welche innere Symmetrie-

gruppe fundamental verwirklicht ist, sei es $SU(2)$, $SU(3)$ etc. als ein von der Dynamik getrenntes und daher aufgepfropft Problem.

Andererseits hat Saller im Rahmen der nichtlinearen Spinortheorie, die gerade auf ein reines Teilchenbild verzichtet und daher konsequenter verfährt als wir es hier taten, sehr vielversprechende Hinweise gefunden, wie eine Dynamik aus einer fundamentalen $SU(2)$ - eine angenäherte $SU(3)$ -Symmetrie erzeugen kann⁽²⁴⁾.

Ferner haben wir in unserer Arbeit die Dimension des Spinorfeldes mit $\dim \psi = 1/2$ bzw. $\dim \psi = -1/2$ jeweils zu Beginn unserer Überlegung einfach festgelegt. Von einer grundlegenderen Betrachtungsweise wäre es aber wünschenswert zu untersuchen, ob diese Festlegungen nicht nur durch "fiat", sondern auch durch die innere Dynamik des Systems erzwungen werden können.

Anhang A: Selbstkonsistente Bestimmung der Masse nach Nambu und Jona-Lasinio⁽²³⁾

Nambu und Jona-Lasinio wählen eine Lagrangefunktion mit einer 4-Fermionen-Wechselwirkung wie in der Heisenbergschen nichtlinearen Spinortheorie:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} g_0 [(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi)^2] \quad (\text{A.1})$$

Die Felder ψ sind aber vierkomponentige Diracspinoren. Die physikalische Masse m setzt sich zusammen aus der nackten Masse m_0 und dem Selbstenergieanteil Σ

$$m = m_0 + \Sigma(p, m) \Big|_{p=m=0} \quad (\text{A.2})$$

Man kann versuchen, $\Sigma(p, m)$ in Störungstheorie sukzessive zu berechnen, indem man von der nackten Masse m_0 (und nackten Kopplungskonstante g_0) ausgeht. Falls die nackte Masse m_0 verschwindet, erhält man aber mit dieser Methode nur Lösungen, für die die angezogene Masse Null ist. Anders ausgedrückt: die Massenrenormierung ist multiplikativ.

Um Lösungen mit $m_0 = 0$, $m \neq 0$ zu erhalten, bietet sich ein verallgemeinertes Hartree-Fork-Verfahren an: man drückt den Selbstenergieterm bereits in der renormierten Masse m aus, und benutzt (A.2), um daraus m selbstkonsistent zu bestimmen.

Berechnet man $\Sigma(p)$ in der niedersten Näherung

$$-i\Sigma(p) = \text{diagram} \quad (\text{A.3})$$


(wobei die äusseren Beine amputiert sind),

so erhält man

$$m = - \frac{i g_0 m}{2\pi^4} \left(\frac{d^4 p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) C(p, \Lambda) \quad (\text{A.4})$$

$C(p, \Lambda)$ ist die Abschneidefunktion, die die Konvergenz des Integrals erzwingt. Wir wählen

$$C(p, \Lambda) = \theta(\Lambda^2 - p^2) \quad (\text{A.5})$$

(Ein solch grobes Verfahren ist für die Zwecke unserer Darstellung hinreichend)

(A.4) hat zwei Lösungen m_1 und m_2

$$m_1 = 0 \quad (\text{A.6})$$

während m_2 bestimmt ist durch

$$\frac{2\pi^2}{g_0 \Lambda^2} = 1 - \frac{m_2^2}{\Lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_2^2}\right) \quad (\text{A.7})$$

Zusätzlich nimmt man an, daß durch die Einbeziehung höherer Ordnungen bei der Berechnung von $\Sigma(p)$ das Ergebnis (A.7) nicht qualitativ verändert wird, d.h. daß sich auch für $m_0 = 0$ Lösungen mit $m \neq 0$ ergeben.

Dieses Verfahren wenden wir nunmehr auf unser Modell (II.24a-f) an, wobei aber auf einige Unterschiede zu achten ist:

Da wir zweikomponentige Weylspinoren benutzen, ist (zumindest in niederster Ordnung) der einzige nichtverschwindende Selbstenergieterm (vgl. II.14):

$$-i\pi(p^2) = \begin{array}{c} \hat{\psi} \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \psi \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \psi \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \hat{\psi} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} \quad (\text{A.8})$$

Durch (A.8) wird auch nicht m wie oben, sondern m^2 festgelegt, da $(\hat{\psi}^\dagger \psi + \psi^\dagger \hat{\psi})$ ein Bosonoperator der Dimension zwei ist.

Aus (A.8) liest man ab

$$m^2 = \Pi(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = -\frac{g}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{p^2}{p^2-m^2+i\epsilon} \theta(\Lambda^2-p^2) \quad (\text{A.9})$$

Als Lösung ergibt sich:

$$m^2 = \frac{g}{8\pi^2} \left[\Lambda^2 - \frac{m^2}{2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

Man sieht sofort, daß es nur eine Lösung m gibt, und daß diese von Null verschieden ist. Es gibt eine - freilich etwas künstlich anmutende - Möglichkeit zu erzwingen, daß die renormierte Masse m Null ist. Man führt eine nackte Masse m_0 ein mit $m_0^2 = \frac{-g}{8\pi^2} \Lambda^2$ ($-g > 0$)
Dann ergibt sich:

$$m^2 = -\frac{g m^2}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \quad (\text{A.10'})$$

$m^2 = 0$ ist eine Lösung für (A.10'), doch wie gesagt, ein solches Verfahren erscheint etwas künstlich.

Anhang B: Propagator-Matrix für eine Spinortheorie mit $\dim \psi = -1/2$ und spontaner Brechung der Skaleninvarianz

$$\langle 0 | \bar{\Psi}(\frac{x}{2}) \Psi(-\frac{x}{2}) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip \cdot x} \underline{S}(p)$$

$$\underline{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2(p^2 - \mu^2)} & - & \frac{1}{p^2 - \mu^2} & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} & - & 1 - \frac{m^2 - \mu^2}{2(p^2 - \mu^2)} & \bar{\sigma} \cdot p \left[1 - \frac{m^2 - \mu^2}{p^2} - \frac{\mu^2(m^2 - \mu^2)}{2p^2(p^2 - \mu^2)} \right] \\ - & + & - & - & + & - & - \\ & - & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2 - \mu^2} & 1 & - & \bar{\sigma} \cdot p \left[1 - \frac{m^2 - \mu^2}{2(p^2 - \mu^2)} \right] & \mu^2 \left[1 - \frac{m^2 - \mu^2}{2(p^2 - \mu^2)} \right] \\ - & + & - & - & + & - & - \\ & - & - & \bar{\sigma} \cdot p \left[1 - \frac{\mu^2}{p^2} \right] & \frac{m^2 - \mu^2}{2} & - & \bar{\sigma} \cdot p \left[\frac{\mu^2(m^2 - \mu^2)}{2p^2} \right] \\ - & + & - & - & - & + & - \\ & - & - & \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{4(p^2 - \mu^2)} & \frac{\mu^2(m^2 - \mu^2)^2}{4(p^2 - \mu^2)^2} & - & - \\ - & + & - & - & - & + & - \\ & - & - & - & - & - & \bar{\sigma} \cdot p \frac{[\mu^2(m^2 - \mu^2)]^2}{4p^2(p^2 - \mu^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{S}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}$$

Die nicht angegebenen Matrixelemente ergeben sich aus der Beziehung $\underline{S}(p) = \underline{S}^T(p)$.

Anhang C: Schwinger-Modell in (1+1)-Dimensionen

Wir folgen der Darstellung von Casher, Kogut und Susskind⁽³²⁾, da sie die physikalisch interessanten Aspekte des Modells am deutlichsten herausarbeitet. Für den mehr mathematisch orientierten Leser empfiehlt sich dagegen die Arbeit von Lowenstein und Swieca⁽³¹⁾.

Die Lagrangefunktion lautet (die Indizes μ, ν nehmen die Werte 0 und 1 an):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma \cdot \partial \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - g \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi \quad (C.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \quad ; \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu beachten ist, daß die "Ladung" g in (1+1)-Dimensionen die Dimension einer Masse hat.

Der Strom wird auf die übliche Weise als eichinvarianter Operator definiert.

$$j_\mu(x) = \overline{\lim_{\xi \rightarrow 0}} g \bar{\psi}(x + \frac{\xi}{2}) \gamma_\mu \exp\left(ig \int_{x-\frac{\xi}{2}}^{x+\frac{\xi}{2}} A_\mu(z) dz\right) \psi(x - \frac{\xi}{2}) \quad (C.2)$$

wobei aber ξ ein raumartiger Vektor ist.

Dann folgt :

$$\left(\square + \frac{g^2}{\pi}\right) j_\mu(x) = 0 \quad (C.3)$$

Die Theorie enthält also freie Bosonen der Masse $\frac{g}{\sqrt{\pi}}$. Da in der Lorentzzeichnung gilt:

$$\square A_\mu = j_\mu \quad (C.4)$$

erhält man aus (C.3):

$$\square(m^2 A_\mu + j_\mu) = 0$$

Man definiert ein masseloses, freies Skalarfeld $\tilde{\varphi}$ durch die Beziehung

$$m^2 A_\mu + j_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\varphi} \quad (\text{C.5})$$

und eine Dipoldichte φ durch

$$j_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \quad (\text{C.6})$$

(C.3) zeigt, daß φ ein kanonisches massives Bosonfeld ist.

Betrachten wir nun die Situation, daß ein sehr energetisches Fermion-Antifermion-Paar an einem Raumzeitpunkt erzeugt wird. Die beiden Teilchen bewegen sich in entgegengesetzter (Raum-) Richtung auf dem Lichtkegel, da sie masselos sind, und erzeugen eine äußere Dipoldichte $\varphi_{\text{äuß}}$, die wir als c-Zahl behandeln:

$$\varphi_{\text{äuß}} = -g \theta(t+z) \theta(t-z) \quad (\text{C.7})$$

Für die induzierte (q-Zahl) Dipoldichte φ gilt dann:

$$\left(\square + \frac{g^2}{\pi}\right) \varphi = -\frac{g^2}{\pi} \varphi_{\text{äuß}} = \frac{g^3}{\pi} \theta(t+z) \theta(t-z) \quad (\text{C.8})$$

Als Lösung ergibt sich

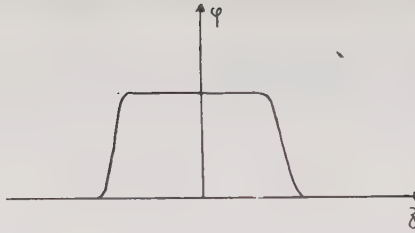
$$\varphi(x) = g \theta(t+z) \theta(t-z) - g \Delta_{\mathcal{R}}(m^2, x^2) \quad (\text{C.9})$$

wobei $\Delta_{\mathcal{R}}$ der retardierte Kommutator ist. Die Zeitentwicklung der Dipoldichte läßt sich leicht veranschaulichen:

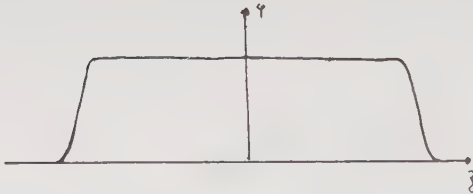
$t < m^{-1}$



$$t \sim m^{-1}$$



$$t > m^{-1}$$



Nur die Raumbereiche, in denen φ variiert, enthalten eine Ladung. Diese Bereiche erstrecken sich vom Ort des auslaufenden Teilchens bis zu einem Abstand von der Ordnung $(t \times m^2)^{-1}$. Die Polarisationsladung folgt dem auslaufenden Teilchen also in einem mit der Zeit immer dichter werdenden Abstand. Man kann sich durch geeignete Integration von (C.9) leicht überzeugen, daß diese Polarisationsladung der auslaufenden Ladung sogar entgegengesetzt gleich ist, sie also vollständig kompensiert.

Diesen Vorgang bezeichnen wir als Confinement.

Wie gesagt, es kann auch auf strenge Weise gezeigt werden, daß das Spektrum der Theorie nur massive, freie Bosonen enthält. Es läßt sich ferner zeigen, daß

$$\psi(x) = e^{-ig\alpha\phi(x)} \chi(x) \quad (C.10)$$

eine Lösung der Gleichung

$$(i\partial - gA)\psi = 0 \quad (C.11)$$

liefert, wobei $\chi(x)$ ein freies, kanonisches Fermionfeld, $\alpha = \gamma_0 \gamma$,
und $\phi = \frac{\pi}{g} (\tilde{\psi} - \psi)$ ist.
Für den Fermionpropagator

$$G(x) = -i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle \quad (C.12)$$

erhält man damit:

$$\begin{aligned} G(x) &= G_0(x) \langle 0 | T e^{ig\alpha\phi(x)} e^{-ig\alpha\phi(0)} | 0 \rangle = \\ &= G_0(x) e^{-i\pi\Delta_F(0,x^2)} e^{i\pi\Delta_F(m^2,0)} \end{aligned} \quad (C.13)$$

wobei $G_0(x)$ der freie Fermionpropagator ist

$$G_0(x) = -\frac{i}{2\pi} \frac{\gamma \cdot x}{x^2 - i\epsilon} \quad (C.14)$$

und $\Delta_F(m^2, x^2)$ der Feynman-Propagator zur Masse m .
Daher

$$G(x) \longrightarrow G_0(x) \quad \text{für} \quad x^2 \longrightarrow 0$$

d.h. das Lichtkegelverhalten des exakten Fermionpropagators ist das
eines freien Fermionfeldes.

Fußnoten

- F1 Unter "Strömen" sind hierbei lorentzko~~v~~variante Ausdrücke gemeint, die bilinear in dem betreffenden Feld sind; für ein Diracfeld gibt es fünf unabhängige "Ströme":

$$\bar{\psi}\psi; \bar{\psi}\gamma_5\psi; \bar{\psi}\gamma_\mu\psi; \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi; \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \quad (3)$$

- F2 Es erscheint interessant, darauf hinzuweisen, daß in jüngster Zeit ein analoges Verfahren bei der Anwendung nicht-abelscher Eichtheorien auf die Hadronen-Physik vorgeschlagen wurde: einerseits will man an der "asymptotischen Freiheit" der Eichwechselwirkung festhalten, andererseits bricht man die Eichsymmetrie spontan durch die Einführung von Higgs-Skalaren, um der Massenaufspaltung innerhalb der Hadronen-Multipletts Rechnung zu tragen. In den üblichen Modellen ergibt sich aber folgendes Dilemma: sind die Higgs-Skalare zusätzliche elementare Felder, so zerstören sie die "asymptotische Freiheit" der Wechselwirkung !

Als Ausweg wurde vorgeschlagen, die Higgs-Skalare als Objekte zu behandeln, die aus den elementaren Feldern der Theorie zusammengesetzt sind; falls dies möglich ist, gehen die Higgs-Skalare nämlich nicht in die Berechnung der β -Funktion ein, und die "asymptotische Freiheit" der Theorie bleibt erhalten.

- F3 Wir benutzen, wie allgemein üblich, "natürliche" Einheiten, d.h. wir setzen $\hbar = c = 1$.

Es existieren dann nur noch Längen- oder dazu reziproke Masseneinheiten.

$$\dim(\text{Länge}) = - \dim(\text{Masse}) = -1$$

Außerdem gibt es den Begriff der Skalendimension: Unter Skalentransformation oder Dilatation versteht man die Transformation

$$x \longrightarrow \lambda x$$

Skaleninvarianz einer Theorie bedeutet, daß ein unitärer Operator $U(\lambda)$ existiert, der den Zustandsraum der Theorie invariant läßt und Operatoren $O(x)$ wie folgt transformiert:

$$U^+(\lambda) O(x) U(\lambda) = \lambda^{d_0} O(\lambda x)$$

d_0 ist die Skalendimension des Operators $O(x)$.

Die Skalendimension ist mit der üblichen Dimension eines Operators nur identisch, solange keine dimensionsbehafteten Parameter in der Theorie auftreten.

F4 Für Eichtheorien ist dies auch, wie gezeigt werden kann, eine hinreichende Bedingung.

F5 Im folgenden arbeiten wir stets mit Weylspinoren, wenn es nicht ausdrücklich anders festgelegt wird. Wir folgen hierbei der Argumentation von Heisenberg und Dürr: Da wir mit einer masselosen Theorie beginnen wollen und Massen nur durch spontane Symmetriebrechung der Skaleninvariant einführen werden, ist es naheliegend, Weylspinoren zu benutzen. Ferner läßt sich für Weylspinoren nur eine Lorentzinvariante Kopplung angeben $\sim \psi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi \psi^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi$, während man mit Diracspinoren fünf Lorentzinvariante Kopplungen niederschreiben kann.

Aus diesen beiden Einfachkeitsüberlegungen heraus wählen wir Weylspinoren.

F6 Die Doppelpunkte : : sollen darauf hinweisen, daß man, wie stets in Quantenfeldtheorien, bei der Definition von Produkten von Feldoperatoren am selben Ort Sorgfalt zu walten hat. Eine eingehendere Würdigung des Problems findet sich bei Ref. 9

F7 Es erscheint interessant, darauf hinzuweisen, daß im Sektor negativer Norm die Masse μ mit einem anderen Vorzeichen auftritt, als die Masse m im Sektor positiver Norm (s. III.12). Anders ausgedrückt heißt dies, daß der Diracspinor $\psi^{\downarrow m}$ (s. III.34b) eine Lösung positiver Energie (und positiver Norm) für die freie Diracgleichung ist, der Diracspinor $\psi^{\downarrow, -\mu}$ (s. III.34b) aber eine Lösung negativer Energie (und negativer Norm).

F8 Der Begriff "statischer Grenzfall" ist hier natürlich nur in einem sehr naiven und ausschließlich heuristisch motivierten Sinne gebraucht: man definiert den "statischen Grenzfall" für (IV.5) naiv durch (IV.6), und versucht nicht, was eigentlich angebracht wäre, ihn durch eine Integration von (IV.5) über die Zeit zu gewinnen (dieses Integral divergiert nämlich !).

F9 Genauer gesagt, die unrenormierten Ströme, an die die Gluonen an-koppeln, sind erhalten, da sie die lokalen Generatoren der globalen Eichsymmetrie sind. Die Ströme sind auch erhalten, nachdem sie durch die Eichwechselwirkung renormiert worden sind. Diese Eigenschaft reicht für unsere Rechnung.

Erst für Rechnungen, die von höherer Ordnung in der Gluon-Kopplung ist, müßte gezeigt werden, daß der Strom auch noch nach Renormierung durch die Gluonwechselwirkung erhalten ist.

Literatur

- (1) E. Fermi, Nuov.Cim. 11, 1 (1934).
- (2) s.z.B. D.C. Cundy, Rapporteur's Talk given at the 17th International Conference on High-Energy Physics, London, 1-10 July 1974.
- (3) J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, Bibliographisches Institut, Mannheim 1966.
- (4) J.C. Pati, A. Salam, Phys.Rev. Lett. 32, 1083 (1974).
- (5) I.I.Y. Bigi, J.D. Bjorken, Phys.Rev. D10, 3697 (1974).
- (6) s.z.B., C.H. Llewellyn-Smith, Ref. TH. 1710-CERN.
- (7) S. Weinberg, Phys.Rev.Lett. 19, 1264 (1967).
- (8) Die Nützlichkeit dieses Kriteriums wurde besonders hervorgehoben von J. Ellis: e^+e^- Annihilation, the New Particles and Charm, XIV. Internationale Universitätswochen für Kernphysik Schladming 1975.
- (9) H.P. Dürr, N.J. Winter, Nuov.Cim. 70A, 467 (1970).
- (10) J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- (11) H.P. Dürr, in: Proceedings of the symposium on basic questions in elementary particle physics (Herausgeber: H.P. Dürr).
- (12) s.z.B., H.P. Dürr, On the problem of unitarisation in field theories with indefinite metric, CPT 179.
- (13) W. Heisenberg, Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles (London 1966).
- (14) s.z.B., B. Richter, Plenary Report on $e^+e^- \rightarrow$ hadrons, Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics, London 1974 (Herausgeber J.R. Smith).
- (15) Als ein Beispiel für viele: I.I.Y. Bigi, H.P. Dürr, N.J. Winter, Phys.Lett. 45B, 384 (1973).
- (16) I.I.Y. Bigi, H.P. Dürr, N.J. Winter, Nuov.Cim. 22A, 420 (1974).

- (17) H. Saller, Nuov.Cim 24A, 391 (1974).
- (18) H.P. Dürr, Nuov.Cim. 22A, 386 (1974).
- (19) H.P. Dürr, Preprint MPI-PAE/PTh 23, Oktober 1974.
- (20) E. Noether, Nachr.Kgl.Ges.Wiss., Göttingen, 235 (1918);
E.L. Hill, Rev.Mod.Phys., 23, 253 (1951).
- (21) U. Wolff, Diplomarbeit, Universität München, 1975.
- (22) s.z.B., E. Abers, B.Lee, Gauge Theories, Physics Reports
- (23) Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, Phys.Rev. 122, 345 (1961);
124, 246 (1961).
Die Bedeutung dieser Arbeit für die nichtlineare Spinortheorie
ist zuerst und zuvörderst von H. Saller betont worden; s. Ref. 24.
- (24) H. Saller, Nuov.Cim. 30A, 541 (1975).
- (25) J.C. Pati, A. Salam, Phys.Rev.Lett. 31, 661 (1973).
- (26) M.L. Perl et al., Phys.Rev.Lett. 35, 1489 (1975).
- (27) S.K. Kauffmann, CALTECH preprint, 1974.
- (28) J. Kiskis, Ph.D. Thesis, Stanford University, 1974.
- (29) J.D. Bjorken, Phys.Rev. 179, 1547 (1969).
- (30) J. Schwinger, Phys.Rev. 128, 2425 (1962).
- (31) J. Lowenstein, Swieca, Ann. of Phys. 68, 172 (1971).
- (32) A. Casher, J. Kogut, L. Susskind, Phys.Rev. D10, 732 (1974).
- (33) S. Coleman, R. Jackiw, L. Susskind, Ann. of Phys. 93, 267 (1975).
- (34) G. Zweig, CERN preprints 8182/TH. 401 und 8419/TH. 412 (1964).

L e b e n s l a u f

Am 22. August 1947 wurde ich in München als Sohn des Journalisten Achmed Bigi und der Lebensmittelchemikerin Friederike Bigi, geb. Ballewski, geboren. Von 1954 bis 1958 besuchte ich die Volksschule in München und trat 1958 in das humanistische Wilhelmsgymnasium ein.

1960 zog meine Mutter aus dienstlichen Gründen von München fort. Daher war ich in den nächsten Jahren Schüler am Gymnasium Johanneum Lüneburg (1960), Ratsgymnasium Hannover (1961-1963) und Gymnasium Fridericianum Erlangen (1963-1967), wo ich 1967 das Abitur ablegte.

1967 trat ich in die Stiftung Maximilianeum ein und begann an der Universität München, Physik zu studieren.

Im Frühjahr 1970 legte ich das Vordiplom in Physik ab. Im Herbst 1970 ging ich für ein Jahr an das Brasenose College der Universität Oxford. Herbst 1971 kehrte ich an die Universität München zurück und fertigte in der Folgezeit am Max-Planck-Institut für Physik unter der Anleitung von Professor H.P. Dürr meine Diplomarbeit an über das Thema: "Lichtkegelalgebra von $SU(3) \times SU(3)$ -Strömen in einem selbstwechselwirkenden Quark-Modell".

Im Frühjahr 1973 legte ich die Diplomprüfung in Physik ab.

Seitdem bin ich als Doktorand am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München.

Im Herbst 1973 ging ich für ein Jahr an das Stanford Linear Accelerator Center.

